

渐开线直齿轮啮合接触计算与分析

王羽达¹ 吕宏展¹ 侯志勇¹ 王淑妍¹ 马伟光¹ 李峰²

(1 东华大学 机械工程学院, 上海 201620)

(2 郑州机械研究所有限公司, 河南 郑州 450052)

摘要 渐开线齿轮的啮合过程分析是判断传动品质的重要依据, 其中, 接触应力、传动误差及啮合刚度是分析的重点。根据直齿轮 TCA 模型, 提取各接触点曲率半径, 将齿面啮合接触简化为不同半径圆柱体对之间的弹性挤压。在考虑齿间载荷分配的情况下, 运用 Hertz 原理对齿面进行了承载接触分析。分析表明, 通过该方法得到的结果与有限元及实验所得结果相符, 接触应力最大值相差 0.74%, 传动误差及啮合刚度规律一致。该方法可反映齿面接触的动态过程及啮合刚度。

关键词 赫兹接触 接触应力 承载分析 传动误差

Calculation and Analysis of Meshing Contact of Involute Spur Gear

Wang Yuda¹ Lü Hongzhan¹ Hou Zhiyong¹ Wang Shuyan¹ Ma Weiguang¹ Li Feng²

(1 School of Mechanical Engineering, Donghua University, Shanghai 201620, China)

(2 Zhengzhou Research Institute of Mechanical Engineering Co., Ltd., Zhengzhou 450052, China)

Abstract The analysis of meshing process of involute spur gear is an important basis to judge the transmission quality, and especially contact stress, transmission error and meshing stiffness are key indexes. According to the TCA model of spur gear, curvature radii in different meshing points are extracted. The meshing process of tooth surface is simplified as elastic extrusion between pairs of cylinders with different radii. Considering the load distribution between the teeth, the Hertz principle is used to carry out load-bearing contact analysis on the tooth surface. It shows that the results of this method are quite same as the results obtained by FEM and experiment. The error of the maximum of the contact stress is 0.74%. The results of transmission error and meshing stiffness are essentially same. The dynamic process of tooth surface contact and meshing stiffness can be reflected by this analysis method.

Key words Hertz contact Contact stress LTCA Transmission error

0 引言

渐开线圆柱齿轮传动中, 轮齿的啮合接触是影响齿轮传动的关键因素之一。为提高传动品质, 国内外学者对齿轮接触分析做了大量研究。在齿轮啮合分析中, Litvin^[1]提出了轮齿接触分析的 TCA 算法, 通过求解 5 个非线性方程组来求解啮合点的位矢与法矢, 得到各瞬时接触点及齿面的啮合路径。但齿轮实际接触时, 尤其是在高速重载情况下, 接触齿面会产生弹性变形, 导致 TCA 的轻载分析结果无法准确反映齿轮的啮合情况。为解决这一问题, 国外许多学者提出并完善了齿轮承载分析方法 (LTCA)^[2-4], 其被作为连接齿轮几何特性和力学分析的桥梁, 所计算的承载传动误差 (LTE) 是齿轮产生噪声振动的重

要因素, 齿间载荷分布 (LSR) 是接触应力计算的基础。有限元法 (FEM) 由于可以处理边界条件复杂的接触问题, 近来被广泛应用于 LTCA 之中。Li 等^[5-6]结合 FEM, 建立了齿轮半解析法 LTCA 模型并开发了 FEM 软件, 在考虑齿轮加工误差、安装误差及齿廓修形量的同时, 计算齿轮弯曲应力与接触应力, 并分析误差量对齿轮 TE 及 LSR 的影响。国内也有很多学者^{[7]-[8]}在此方法上做了大量研究和改进, 精度得到了提升。

尽管上述方法已经十分完善, 但在分析一般工况下的渐开线圆柱齿轮啮合时, 结合有限元方法的计算时间长, 难收敛, 模型简化不规范及难以确定接触区域等问题会给实际工程应用带来一些困难。

Week 等^[9]通过将轮齿接触转换为一对圆柱体接触进行实验分析, 所得的结果显示, 两种接触应力趋势相同, 即在相同工况下, 齿轮接触可简化为圆柱体接触。Gonzalez-Perez 等^[10]基于 Hertz 理论计算得出齿间载荷分布、接触区域及最大接触应力, 并通过 FEM 模型进行了结果验证。Singh 等^[11]则对比了 AG-MA 标准与 FEM 求解的接触应力, 结果表明, 两者得出的齿间载荷分布基本相同。通常, Hertz 公式较多被用于计算啮合节点处的最大接触应力, 但用于反映齿轮全啮合过程的力学特性的情况较少。但相较于 FEM, Hertz 弹性理论计算快捷, 可在结合 TCA 后快速编制程序实现, 便于工程应用。

本文中在通过 TCA 分析得出的直齿轮齿面方程的基础上, 基于 Hertz 接触理论和齿面共轭关系, 将各齿面接触点对离散, 简化接触模型, 并基于齿间载荷分布进行模型承载分析, 计算其接触应力、啮合刚度及传动误差, 从而提出了一套快捷、可用 Matlab 实现的齿轮接触分析方法。

1 直齿轮齿面 TCA

图 1 所示为基于范成原理的齿轮加工坐标系。图 1 中, S_i 为与刀具齿条固联的坐标系; S_f 为与直齿轮固联的加工坐标系; S_s 为辅助旋转坐标系; 坐标轴 X_i 与齿条节线重合, 齿条直线运动距离为 y ; r_d 为齿轮分度圆半径。

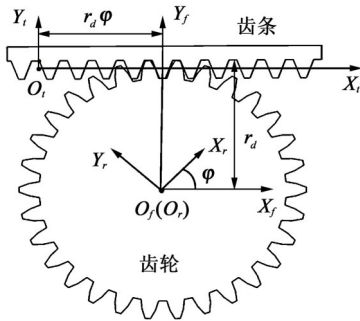


图1 齿轮加工坐标系

Fig. 1 Coordinate of gear machining

齿条齿面方程在坐标系 S_i 下可表示为

$$R_{ii} = R_{ii}(u_i, v_i) \quad (i = 1, 2) \quad (1)$$

式中, u_i 、 v_i 均为刀具齿条齿面参数; 数字 1、数字 2 分别代表主、从动轮。

直齿轮齿面方程可由啮合关系推导为

$$R_{fi} = M_{f1}(y_i)M_{f2}(\varphi_i)R_{ii}(u_i, v_i) \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

式中, M_{f1} 为平移矩阵; M_{f2} 为旋转矩阵; 平移距离满足 $y = r_d \cdot \varphi_i$, φ_i 为齿轮加工旋转角。

齿轮由齿条齿面包络而成, 满足啮合方程, 即

$$\frac{x_f - r_d}{n_{fx}} = \frac{y_f - 0}{n_{fy}} \quad (3)$$

式中, n_{fx} 、 n_{fy} 分别为相应法向量在齿轮加工坐标系下的值。将式(3)代入式(2), 齿面方程可化为

$$R_{fi} = R_{fi}(u_i, \varphi_i) \quad (i = 1, 2) \quad (4)$$

如图 2 所示, 将直齿轮齿面方程转换至齿轮副啮合坐标系 S_s 中, P_s 为某一啮合位置的接触点, 其矢径方程为

$$R_{si} = M_{sf}(\theta_i)R_{fi}(u_i, \varphi_i) \quad (i = 1, 2) \quad (5)$$

式中, M_{sf} 为加工坐标系 S_f 到坐标系 S_s 的转换矩阵; θ_i 为啮合位置 P_s 处齿轮副相对于初始位置的转角。

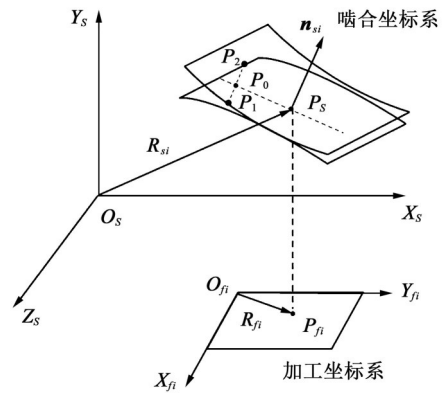


图2 齿轮啮合坐标系

Fig. 2 Coordinate of gear meshing

将其写成空间分量形式为

$$R_{si} = x_i(u_i, \varphi_i, \theta_i)\mathbf{i} + y_i(u_i, \varphi_i, \theta_i)\mathbf{j} + z_i(u_i, \varphi_i, \theta_i)\mathbf{k} \quad (6)$$

根据微分几何的曲面连续接触条件: ①接触点曲面矢径坐标相同; ②接触点曲面单位法向量相同, 来模拟齿轮齿面啮合过程, 即

$$R_{s1}(u_1, \varphi_1, \theta_1) - R_{s2}(u_2, \varphi_2, \theta_2) = 0 \quad (7)$$

$$N_{s1}(u_1, \varphi_1, \theta_1) - N_{s2}(u_2, \varphi_2, \theta_2) = 0 \quad (8)$$

式中, 任意接触点的单位法向量为 N_s 。

齿轮在某一瞬时接触位置点 P_s 啮合时, 两齿面其余位置均存在间隙 b_0 。现设沿 P_s 点切线方向有一点 P_0 , 过其作 N_s 的平行线^[7], 交两齿面于 P_1 、 P_2 , $\overline{P_1P_2}$ 长度即为齿面间隙 b_0 , 其是判断齿轮是否承载接触的重要指标。

2 简化啮合接触模型

工程上, 较多使用 Hertz 理论来计算齿轮副啮合时的最大接触应力, 将齿轮在节点处的受载啮合转化为图 3 所示的两相当长弹性圆柱的互相接触。圆柱体在受载荷 F_n 下相挤压接触时, 将由线接触变为面接触, 形成宽为 $2b$, 长为 L 的矩形接触区域, 其应力呈椭圆分布。

根据 Hertz 接触理论, 可推出接触区半宽 b 、最大接触应力 $\sigma_{\max}$ 及接触应力 σ 分布公式分别为

$$b = \sqrt{\frac{8F_n}{\pi B} \times \frac{\frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2}}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}}} \quad (9)$$

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{F_n}{\pi B} \frac{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}}{\frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2}}} \quad (10)$$

$$\sigma = \sigma_{\max} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \quad (11)$$

式中, B 为齿宽; E_1 、 E_2 分别为两圆柱体材料的弹性模量; v_1 、 v_2 分别为两圆柱体材料的泊松比; ρ_1 、 ρ_2 分别为两圆柱体曲率半径; y 为垂直于圆柱体轴线坐标。

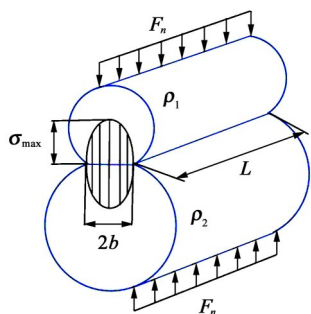


图3 圆柱体接触简图

Fig. 3 Schematic diagram of cylinders contact

为得到齿轮在啮合全过程的接触情况, 可将齿面各点离散, 求出各自曲率半径, 将齿轮齿面的啮合过程简化为一系列弹性圆柱体对接触, 其半径随齿轮转动而变化。

由齿轮TCA分析可得到直齿轮在啮合坐标系中的齿面方程。由微分几何可知, 在齿面某啮合点单位法向量 N_s 确定时, 主动轮齿面各点主曲率 k 表达式为

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

式中, E 、 F 、 G 均为齿轮曲面第一基本量; L 、 M 、 N 均为齿轮曲面第二基本量。其表达式分别为

$$E = R_u \cdot R_u F = R_u \cdot R_v G = R_v \cdot R_v \quad (13)$$

$$L = R_{uu} \cdot N M = R_{uv} \cdot N N = R_v \cdot N_s \quad (14)$$

式中, R_u 、 R_v 分别为齿面方程 $R_i(u, v)$ 对参数 u 、 v 的1阶导数; R_{uv} 、 R_{uu} 均为2阶导数。

在得到主动轮齿面各离散啮合点的主曲率后, 可以根据欧拉—萨瓦里公式^[12](图4): 在已知一个齿轮齿廓的主曲率半径 ρ_1 时, 可直接求得与之共轲的另一个齿廓的曲率半径 ρ_2 。图4中, P 为啮合节点; $N_1 N_2$ 为理论啮合线; N_1 、 N_2 分别为啮合线与主、从动轮基圆的交点。

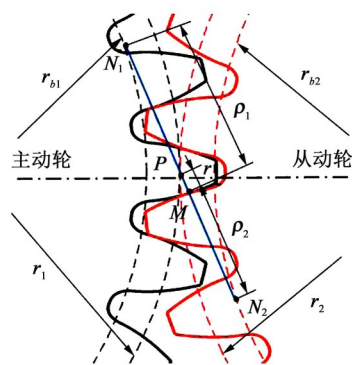


图4 共轲齿廓的曲率关系

Fig. 4 Relationship of curvature of conjugate gear profile

在啮合坐标系下共轲的两齿面曲率满足关系式为

$$\frac{1}{\rho_1 - r} + \frac{1}{\rho_2 - r} = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \frac{1}{\sin \alpha} \quad (15)$$

式中, r 为某啮合点 M 与节点 P 间的距离。

利用该关系, 可快速得到从动轮齿面各共轲离散点的曲率半径, 以便用于后续的承载接触分析。

3 直齿轮啮合载荷分配

渐开线直齿轮的极限重合度为 1.981, 这意味着渐开线齿面在 1 个完整的啮合周期内, 必定会出现单、双齿连续交替啮合。在双齿啮合区域, 轮齿对只承受部分载荷; 而在单齿啮合区域, 轮齿对承受全部载荷。齿轮啮合过程如图5所示。图5中, 主动轮以顺时针转动, $N_1 N_2$ 为该齿轮对啮合线方向; AD 为实际啮合线; AB 、 CD 均为双齿啮合区域; BC 为单齿啮合区域。

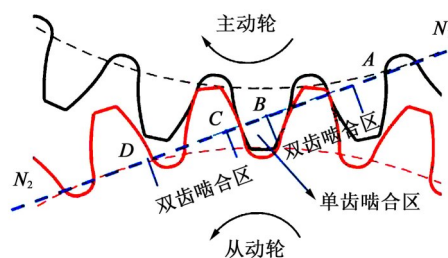


图5 渐开线直齿轮啮合过程图

Fig. 5 Meshing process of involute spur gear

理论上, 单齿区域载荷应为双齿区域承受总载荷的一半, 但在实际啮合过程中, 由于基节误差的存在, 导致沿啮合线上各齿对之间载荷分布并不均匀。

文献[13]根据材料力学法求得直齿轮变形量, 再基于齿间载荷分配定义, 进行了齿廓各位置的载荷分配系数 $R(\varepsilon)$ 的推导。通过拟合多组数据发现, 各端点载荷分配系数值通常接近于 0.33 及 0.67(图6), 这与 ISO 标准及 AGMA 标准中的直齿轮

载荷分配系数规定相一致^[14]。

为描述齿轮接触全过程,引入参数 ε ,其值的确定可参考重合度 ε_α 定义,即 ε_α 为实际啮合线(AD)长度与基圆齿距 p_b 的比值,即

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\overline{AD}}{p_b} \quad (16)$$

将各齿廓离散点对应的简化圆柱体对按单、双齿区域不同,沿啮合线方向排布,可得各点在啮合位置 M 的参数 ε 为

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{(X_M - X_A)^2 + (Y_M - Y_A)^2}}{p_b} \quad (17)$$

式中, A 点为实际啮入点位置。同理,初始值 $\varepsilon_{\min}$ 的确定可由点 A 与理论啮合线极限点 N_1 的距离求得。

据此定义可知,实际啮入、啮出点的参数 ε 之差为 ε_α ,且同时参与啮合的相邻齿对的 ε 之差为1(双齿啮合区域),对于重合度在1~2之间的直齿轮啮合,载荷分配系数 $R(\varepsilon)$ 满足关系式为

(1) 离散点在首个双齿啮合区域($\varepsilon_{\min} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\min} + \varepsilon_\alpha - 1$),则

$$R(\varepsilon) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_{\min}}{\varepsilon_\alpha - 1} \right) \quad (18)$$

(2) 离散点在单齿啮合区域($\varepsilon_{\min} + \varepsilon_\alpha - 1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\min} + 1$),则

$$R(\varepsilon) = 1 \quad (19)$$

(3) 离散点在第二个双齿啮合区域($\varepsilon_{\min} + 1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\min} + \varepsilon_\alpha$),则

$$R(\varepsilon) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{\varepsilon_{\min} - \varepsilon_\alpha - \varepsilon}{\varepsilon_\alpha - 1} \right) \quad (20)$$

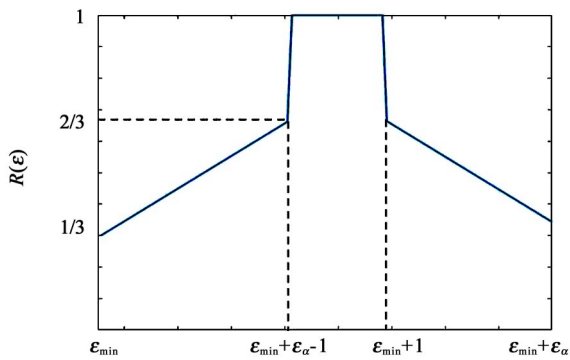


图6 载荷分布系数图

Fig. 6 Load distribution coefficient diagram

4 直齿轮承载接触计算

4.1 接触应力及弹性变形计算

结合前述,建立简化直齿轮承载接触分析模型(图7)。图7中, N_1N_2 为理论啮合线; AD 为实际啮合线;点 A 为从动轮齿顶圆与啮合线的交点; AC 、 BD 均长度均为基圆齿距; AB 、 CD 均为双齿啮合区;

BC 为单齿啮合区。

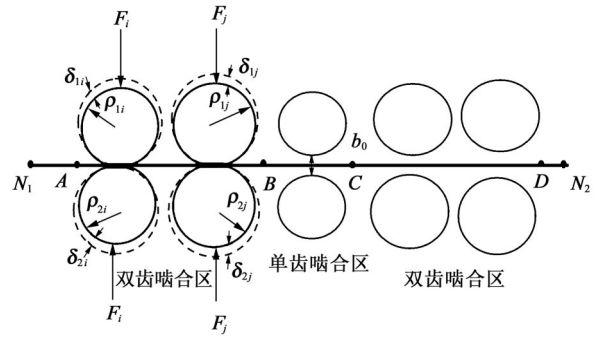


图7 直齿轮简化承载接触模型

Fig. 7 Simplified LTCA model of spur gear

啮合线上各接触区域长度分别为

$$\overline{AD} = r_{b2}(\tan \alpha_{a2} - \tan \alpha) + r_{b1}(\tan \alpha_{a1} - \tan \alpha) \quad (21)$$

$$\overline{DN_2} = \overline{AN_1} = \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - \overline{AD} \quad (22)$$

$$\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{AD} - p_b \quad (23)$$

$$\overline{BC} = p_b - \overline{AB} \quad (24)$$

式中,下标1、下标2分别为主、从动轮; r_{b1} 、 r_{b2} 分别为主、从动轮基圆半径; α_{a1} 、 α_{a2} 分别为主、从动轮齿顶圆压力角。

以齿轮在首个双齿啮合区接触为例,其简化模型为两对曲率半径为 ρ_{mn} 的弹性圆柱体分别受载接触。载荷 F_i 、载荷 F_j 具体数值可由齿间载荷分布系数 $R(\varepsilon)$ 确定,且满足

$$\sum_{n=i,j}^{m=1,2} F_{mn} = P \quad (25)$$

式中, P 为工作总载荷; i, j 分别为两接触点。

接触点的初始间隙为 b_0 ,其值已由直齿轮TCA计算得到,圆柱体弹性变形量为 δ_{mn} 。两圆柱体在受载下会发生挤压变形,啮合点附近的离散点 n 可能由于这种挤压相互接近,发生接触。当满足条件 δ_{1n} 与 δ_{2n} 之和大于 b_0 时,圆柱体对在 n 点发生Hertz弹性接触,由式(9)~式(11)可计算其接触应力。

弹性变形量 δ_{mn} 分别由圆柱体对接触变形 δ_c 及靠近齿根部分的齿廓变形量 δ_f 、渐开线齿廓弯曲变形量 δ_b 、剪切应力导致的变形量 δ_s 和基体部分倾斜产生的变形量 δ_g 组成。其中, δ_c 可由弹性力学给出的集中力 F_{mn} 作用于无限平面下的变形公式结合圆柱体对几何特性积分求得^[15],其余变形量则可通过石川公式方法^{[16]28-32}求得。石川公式通过将齿轮简化为梯形与矩形的悬臂梁,进行材料力学的解析计算。ISO啮合刚度线图也是在采用石川公式的基础上绘制的^[17],结果相对准确而且计算快捷,因此被广泛应用。各部分变形量计算公式分别为

$$\delta_c = \delta_{c1n} + \delta_{c2n} = \frac{2F_{mn}(1-v^2)}{\pi BE} (0.9574 + \ln \frac{\rho_{1n}\rho_{2n}}{B^2}) \quad (26)$$

$$\delta_f = \frac{12F_{mn}}{EBS_F^3} [h_x h_r (h_x - h_r) + \frac{h_r^3}{3}] \quad (27)$$

$$\delta_b = \frac{6F_{mn} \cos^2 \alpha}{EBS_F^3} \left\{ \frac{h_i - h_x}{h_i - h_r} \left[4 - \frac{h_i - h_x}{h_i - h_r} \right] - 2 \ln \frac{h_i - h_x}{h_i - h_r} - 3 \right\} (h_i - h_r)^3 \quad (28)$$

$$\delta_s = \frac{2F_{mn} \cos^2 \alpha (1+v)}{EBS_F} [h_r + (h_i - h_r) \ln \frac{h_i - h_x}{h_i - h_r}] \quad (29)$$

$$\delta_g = \frac{24F_{mn} h_x^2 \cos^2 \alpha}{EBS_F^2} \quad (30)$$

$$\delta_{mn} = \delta_c + (\delta_{f1n} + \delta_{b1n} + \delta_{s1n} + \delta_{g1n}) + (\delta_{f2n} + \delta_{b2n} + \delta_{s2n} + \delta_{g2n}) \quad (31)$$

式中, v 为泊松比; F_{mn} 为 n 点处载荷; E 为弹性模量; ρ_{1n} 、 ρ_{2n} 分别为在 n 点接触的圆柱体半径; h_x 为接触点至齿根距离; h_i 为简化梯形与中心线交点至齿根距离; h_r 为齿高; S_F 为齿厚。 h_x 、 h_i 、 h_r 、 S_F 可由齿轮几何尺寸^{[16]28-32}求出。

4.2 传动误差计算

齿轮承载分析中, 传动误差是反映齿轮接触平稳性的重要指标。为了完整本文中分析方法并验证其精度, 现给出基于前述弹性圆柱体变形量的传动误差计算方法。齿轮传动误差定义为随主动轮转动变化的被动轮实际转角偏离理论转角的值, 即^{[17]2}

$$\delta_{\varphi 2} = (\varphi_2 - \varphi_{20}) - \frac{Z_1}{Z_2} (\varphi_1 - \varphi_{10}) \quad (32)$$

式中, φ_{10} 、 φ_{20} 均为初始转角; Z_1 、 Z_2 分别为主、从动轮齿数。

由于齿轮在接触时无法保证理想啮合状态, 因此, 齿轮就会产生传动误差。 $\delta_{\varphi 2}$ 可由啮合关系转化为沿啮合线方向的法向误差量, 并在齿轮计入弹性变形、修形量等因素下, 建立传动误差计算方法为

$$\delta_{\varphi 2} = \frac{E_T(\varepsilon)}{r_{b2}} \quad (33)$$

$$E_T(\varepsilon) = \delta_{mn}(\varepsilon) - \delta_{tr}(\varepsilon)\delta_{am}(\varepsilon) \quad (34)$$

$$\delta_{tr}(\varepsilon) = \Delta_{\max} \frac{\varepsilon}{L} \quad (35)$$

$$\delta_{am}(\varepsilon) = \Delta_n \frac{4}{B^2} y^2 \quad (36)$$

式中, E_T 为沿啮合线方向的传动误差; r_{b2} 为从动轮基圆半径; δ_{tr} 为齿顶修形量; δ_{am} 为齿向修形量。若齿顶修形采用直线修形, 齿形修形采用鼓形修形^[18], 则通过式(35)、式(36)可得到修形量。其中, $\Delta_{\max}$ 为最大修形量; L 为双齿啮合区域长度; Δ_n 为最大鼓形

量; B 为齿宽; y 为沿齿轮齿宽方向坐标。

5 算例及结果对比

基于所建立的简化直齿轮接触模型, 利用 Matlab 软件, 编制了如图 8 所示的直齿轮接触分析程序。利用该程序进行啮合过程的分析计算, 分别进行接触应力、传动误差与啮合刚度的准确性对比。

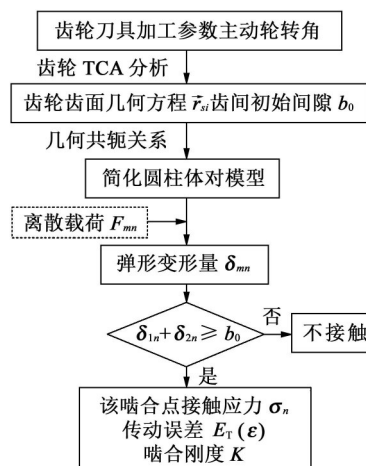


图8 简化接触模型流程图

Fig. 8 Flow diagram of simplified contact model

5.1 接触应力分析

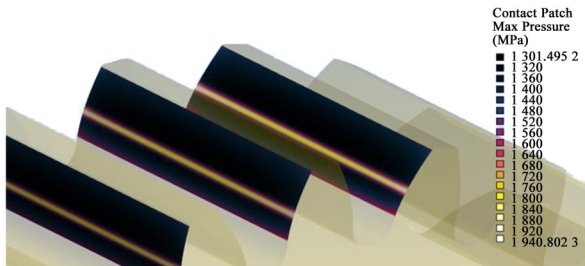
接触应力分析算例采用模数为 1.5 mm, 齿数分别为 25、31, 压力角为 20°, 齿宽为 10 mm 的一对渐开线标准圆柱直齿轮, 在输入功率为 10 kW, 转速为 1 600 r/min 的工况下进行接触应力计算, 并将其与齿轮传动有限元分析软件 MASTA 的分析结果进行对比验证。

首先, 在 MASTA 中进行计算, 分析结果如图 9(a) 所示, 齿面最大接触应力为 1 940.80 MPa。本文中基于简化接触模型的计算结果为 1 955.26 MPa, 通过对比可知, 本文中接触模型与 MASTA 最大应力的相对误差为 0.74%, 接触应力分布规律基本相同。但观察 MASTA 结果发现, 靠近齿根处应力较大, 其原因在于 MASTA 与基于 Hertz 接触原理的模型不同, MASTA 采用的是有限元法与切片模型相结合的算法, 有限元法在分析接触问题时发生边界效应, 使接触线上的应力分布发生变化。

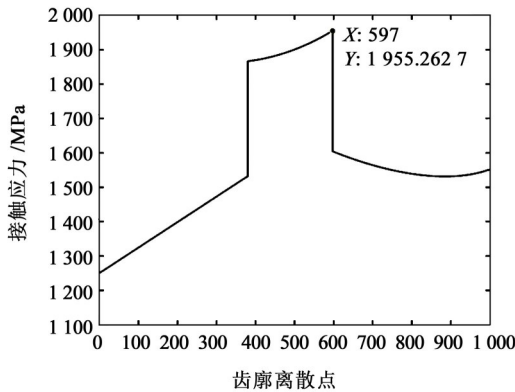
5.2 传动误差分析

Munro 等^[19]以表 1 所示为基本参数的一对圆柱直齿轮为对象, 在不同载荷下, 对传动误差进行了实验测量。以相同参数进行基于本文中方法的传动误差计算可知, 本文中计算结果(图 10)符合实验中体现的齿轮传动误差变化规律, 即: 随着载荷的加大, 弹形变量增大, 齿轮齿廓的共轭关系被破坏, 齿轮传动的振动噪声愈加明显。在单双齿接触区域边

界，传动误差有明显增大，这是因为在这一位置，齿面载荷将发生突变，对齿轮副产生冲击。但该计算方法未计入齿轮存在的一些微小的齿廓误差和轴、轴承及箱体的安装误差，从而导致传动误差曲线与实验测量值相比，存在一些差异。



(a) 齿轮承载接触分析 LTCA(MASTA)



(b) 本研究的接触模型计算结果

图9 接触应力结果对比

Fig. 9 Comparison of contact stress result

表 1 Munro 等试验用齿轮基本参数和工况

Tab. 1 Basic parameters and working conditions of gears used in

Munro and other experiments

参数名称	参数值
模数/mm	3.738
齿数	54,54
齿宽/mm	11
变位系数	0
载荷/(N/mm)	26,191,357,520

5.3 啮合刚度分析

齿轮啮合刚度定义为引起齿轮单位变形所需的力，即

$$K = \frac{F}{B\delta} \tag{37}$$

式中， F 为作用总载荷； B 为齿宽； δ 为变形总量。

通过本文中承载接触分析中的单位载荷与变形量，可获得单齿啮合刚度。再结合在1个啮合周期内的齿轮单双齿交替区域，进而叠加得到齿轮传动的综合啮合刚度。

文献[20]以参数如表2所示的一对渐开线直齿轮为对象，采用基于柔度系数的分析方法，在得到直

齿轮齿面的柔度系数后，进行齿轮承载接触分析，从而得到了综合啮合刚度(图11)。本文中以相同参数的直齿轮进行基于简化模型的承载分析。通过对比可知，两种方法所得综合啮合刚度趋势一致，但观察峰值发现，本文中方法所得刚度结果普遍较高。这是因为相较于柔度系数法，圆柱体变形未计入轮体部分变形，如未考虑轮缘及腹板厚度对整体刚度的影响，所以啮合刚度较高。

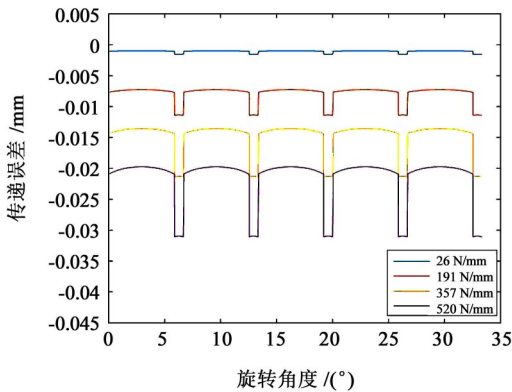


图10 本研究模型计算结果

Fig. 10 Calculation result of this model

表 2 齿轮基本参数和工况

Tab. 2 Basic parameters and working condition of gear

参数名称	参数值	参数名称	参数值
模数/mm	4	变位系数	0
齿数	50,55	载荷/(N·m)	300
齿宽/mm	35		

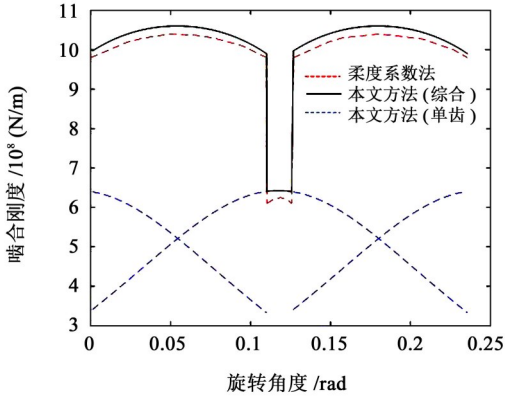


图11 啮合刚度结果对比

Fig. 11 Comparison of meshing stiffness

6 结论

(1) 根据直齿轮TCA模型，提取齿面各接触点的曲率半径，将齿面接触简化为圆柱体对的弹性挤压过程。在考虑齿间载荷分配的情况下，离散载荷，并将各圆柱体对按单、双齿接触区域，沿啮合线方向排布，再运用Hertz原理对该接触过程进行了分析。

(2) 将计算分析结果分别与MASTA、实验及其他齿轮LTCA方法进行了对比。接触应力的分析结果

表明,本文中方法所得应力分布规律与FEM方法结果基本相同,且在单齿啮合区域的最大应力值接近,但在反映齿面端处应力时,由于FEM的边界效应,会使结果发生变化。传动误差分析表明,该方法可反映齿轮实际啮合过程:冲击载荷在单、双齿接触区域使传动产生噪声,且随着齿轮承受载荷增大而振动加剧。啮合刚度与采用柔度法的结果对比表明,两种方法在分析综合啮合刚度时,本文中方法因未计入轮体变形,所以整体较高,但结果基本一致。因此,本文中接触分析方法具有一定合理性。

参 考 文 献

- [1] LITVIN F L. Gear geometry and applied theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004: 241-260.
- [2] UMEYAMA M, KATO M, INOUE K. Effects of gear dimensions and tooth surface modifications on the loaded transmission error of a helical gear pair[J]. Journal of Mechanical Design, 1998, 120(1): 119-125.
- [3] LITVIN F L, GONZALEZ-PERZE I, YUKISHIMA K, et al. Design, simulation of meshing, and contact stresses for an improved worm gear drive[J]. Mechanism and Machine Theory, 2006, 42(8): 940-959.
- [4] SIMON V. Computer aided loaded tooth contact analysis in cylindrical worm gears[J]. Journal of Mechanical Design, 2005, 127(5): 973-981.
- [5] LI S. Finite element analyses for contact strength and bending strength of a pair of spur gears with machining errors, assembly errors and tooth modifications[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(1): 88-114.
- [6] LI S. Effects of machining errors, assembly errors and tooth modifications on loading capacity, load-sharing ratio and transmission error of a pair of spur gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(6): 698-726.
- [7] 方宗德. 齿轮轮齿承载接触分析(LTCA)的模型和方法[J]. 机械传动, 1998, 22(2): 2-4.
FANG Zongde. Model and approach for loaded tooth contact analysis (LTCA) of gear drives[J]. Journal of Mechanical Transmission, 1998, 22(2): 2-4.
- [8] 唐进元, 刘艳平. 直齿面齿轮加载啮合有限元仿真分析[J]. 机械工程学报, 2012, 48(5): 124-131.
TANG Jinyuan, LIU Yanping. Loaded meshing simulation of face-gear drive with spur involute pinion based on finite element analysis[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(5): 124-131.
- [9] WECK M, KRUSE A, GOHRITZ A. Determination of surface fatigue of gear material by rollertests[J]. Journal of Mechanical Design, 1978, 100(3): 433-439.
- [10] GONZALEZ-PEREZ I, ISERTE J L, FUENTES A. Implementation of Hertz theory and validation of a finite element model for stress analysis of gear drives with localized bearing contact[J]. Mechanism and Machine Theory, 2011, 46(6): 765-783.
- [11] SINGH T, PARVEZ M. Comparative study of stress analysis of helical gear using AGMA standards and FEM[J]. International Journal of Engineering Sciences & Research Technology, 2013, 2(7): 1836-1841.
- [12] 吴序堂. 齿轮啮合原理[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2009: 45-50.
WU Xutang. Gear meshing theory[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2009: 45-50.
- [13] SANCHEZ M B, PLEGUEZUELOS M, PEDRERO J I. Enhanced model of load distribution along the line of contact for non-standard involute external gears[J]. Meccanica, 2013, 48(3): 527-543.
- [14] 李庆远. 渐开线圆柱齿轮的载荷分配系数与齿间载荷分布系数[J]. 昆明工学院学报(理工版), 1986(4): 55-63.
LI Qingyuan. Load distribution factor of involute spur gear[J]. Journal of Kunming University of Science and Technology (Engineering Edition), 1986(4): 55-63.
- [15] 张敬彩, 刘红旗, 赵向飞, 等. 直齿轮的轮齿变形分析及其快捷计算方法[J]. 机械传动, 2015, 39(10): 48-55.
ZHANG Jingcai, LIU Hongqi, ZHAO Xiangfei, et al. Theoretical analysis and quick calculation of spur gear tooth deformation[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2015, 39(10): 48-55.
- [16] 日本机械学会. 齿轮强度设计资料[M]. 李茹贞, 赵清慧, 译. 北京: 机械工业出版社, 1984: 28-42.
Japanese Society of Machinery. Design material of gear tooth strength[M]. LI Ruzheng, ZHAO Qinghui, Jr. Beijing: China Machine Press, 1984: 28-42.
- [17] 李亚鹏, 孙伟, 魏静, 等. 齿轮时变啮合刚度改进计算方法[J]. 机械传动, 2010, 34(5): 22-26.
LI Yapeng, SUN Wei, WEI Jing, et al. Study on the improved algorithm of the time-varying meshing stiffness of gear[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2010, 34(5): 22-26.
- [18] 相涯. 渐开线圆柱齿轮齿向鼓形修形方法研究[J]. 机械传动, 2018, 42(6): 49-52.
XIANG Ya. Research of axial crowning modification of involute cylindrical gear[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2018, 42(6): 49-52.
- [19] MUNRO RG, PALMER D, MORRISH L. An experimental method to measure gear tooth stiffness throughout and beyond the path of contact[J]. Journal of Mechanical Engineering Science, 2001, 215(7): 793-803.
- [20] 冯正玖, 靳广虎, 朱如鹏. 基于LTCA的直齿轮啮合刚度的计算与分析[J]. 机械传动, 2019, 43(8): 78-83.
FENG Zhengjiu, JIN Guanghu, ZHU Rupeng. Calculation and analysis of mesh stiffness of spur gear based on LTCA[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2019, 43(8): 78-83.

收稿日期: 2020-12-22 修回日期: 2021-01-19

基金项目: 国家重点研发计划(2018YFB2001702-04)

作者简介: 王羽达(1996—), 男, 上海人, 硕士研究生; 研究方向为机械传动。

通信作者: 吕宏展(1979—), 男, 河南商丘人, 副教授, 工学博士, 硕士生导师; 主要研究方向为精密机电传动与系统、智能装备。