

基于小振动坐标法的精密摆线减速器机电耦合动力学建模与分析

杜文文 卫作鑫 张迎辉 何卫东
(大连交通大学 机械工程学院, 大连 116028)

摘要:【目的】揭示误差激励与电动机输入共同作用下精密摆线减速器的耦合振动机制, 为误差控制及机电参数优化提供理论依据。【方法】首先, 以标准三曲柄双摆线轮精密摆线减速器为对象, 基于小振动坐标法和拉格朗日方程, 建立了包含输入轴、曲柄轴、摆线轮、输出行星架的11自由度平面弯扭耦合动力学模型, 并结合伺服电动机电压-电流-电磁转矩增量关系构建了机电耦合动力学方程; 其次, 模型考虑了输入级齿轮副时变啮合、偏心轴承二维弹性支承及摆线针齿副单边接触特性, 分析了误差激励、负载波动、电动机参数对系统动态响应的影响。【结果】输入端扭转振动经曲柄轴和偏心轴承转化为摆线轮平面振动, 并通过偏心支承反力传递至输出行星架, 形成输入扭转-摆线轮平面运动-输出扭转的耦合传递路径。输入级齿轮误差主要影响输入轴和曲柄轴的扭转响应, 其影响沿传动链向输出端逐渐衰减; 摆线针齿误差通过改变多齿接触状态和瞬时载荷分配, 对输出动态传动误差影响更显著。与基准工况相比, 输入级齿轮误差、摆线针齿误差和负载波动增大时, 输出动态传动误差峰值分别提高12.37%、30.55%、7.96%。输入轴速度波动与电流扰动通过反电动势和电磁转矩形成双向机电耦合; 增大机械阻尼可有效抑制输入端振动, 而减小绕组电感会加剧电流纹波。

关键词:精密摆线减速器; 弯扭耦合; 机电耦合; 小振动坐标法; 动力学模型

中图分类号: TH132.46 **DOI:** 10.16578/j.issn.1004.2539.XXXX.XX.001

0 引言

精密摆线减速器具有传动比大、结构紧凑和传动精度高等特点, 被广泛应用于工业机器人、数控装备及航空航天执行机构等精密传动系统^[1]。其动力由输入级渐开线行星齿轮机构经曲柄轴、偏心轴承和摆线轮传递至输出行星架, 传动链中包含时变啮合、偏心支承和多齿接触等复杂作用。受齿轮误差、摆线针齿误差、接触刚度变化及负载波动影响, 各构件会在理想周期运动附近产生微小振动, 并表现为输入端扭转振动、摆线轮平面运动及输出动态传动误差。因此, 建立能够反映全传动链运动约束与振动传递关系的动力学模型, 是研究精密摆线减速器动态特性的基础。

现有研究已由纯扭转模型逐步发展至平移-扭转耦合及接触多体动力学模型。张大卫等^[2]建立了考虑两级啮合刚度和工作负载的5自由度扭转模型; 郑钰馨等^[3]、Wang等^[4]进一步分析了时变刚度、间隙及传动误差引起的非线性扭转响应; Yang等^[5]将轴承支承

和曲柄轴变形引入整机模型; 孟聪等^[6]研究了支承参数对系统模态特性的影响。相关研究表明, 集中参数模型具有物理关系明确、计算效率较高等特点, 但纯扭转或一般平移-扭转模型对偏心机构几何约束及摆线轮面内复合运动的描述仍较为简化。

摆线针齿接触和偏心支承是整机动力学建模的关键。杨云等^[7]建立了摆线针轮啮合刚度模型; Xu等^[8]实现了偏心轴承、摆线轮和针齿多点接触的统一求解; 常安全等^[9]、卢琦等^[10]基于多体动力学方法研究了接触、间隙及几何误差对传动误差的影响; Tung等^[11]建立了行星-摆线复合减速器时变动力学模型; Li等^[12]研究时考虑了齿廓修形、制造误差及轴承间隙等因素; 丁国龙等^[13]和苏建新等^[14]分别分析了系统模态、啮合刚度及结构参数对传动性能的影响。在传动误差研究方面, Lin等^[15]开展了运动误差与公差分配分析; Yang等^[16]建立了整机等效机构与转角传动误差模型; 许立新等^[17]进一步研究了负载条件下的动态传动误差。上述研究提高了复杂接触和误差因素的描述能力, 但多数模型采用等效刚度表征

收稿日期: 2026-07-21

作者简介: 杜文文,男,2001年生,甘肃定西人,硕士研究生; 主要研究方向为现代机械传动; dwwhh123@163.com。

张迎辉(通信作者),男,1976年生,河北石家庄人,博士,副教授; 主要研究方向为现代机械传动等; sun_yue_zyh@djtu.edu.cn。

引用格式: 杜文文,卫作鑫,张迎辉,等.基于小振动坐标法的精密摆线减速器机电耦合动力学建模与分析[J].机械传动,XXXX,XX(X):1-12.

DU Wenwen, WEI Zuoxin, ZHANG Yinghui, et al. Electromechanically coupled dynamic modeling and analysis of a precision cycloidal reducer based on the small-vibration coordinate method[J]. Journal of Mechanical Transmission, XXXX, XX(X): 1-12.



免费获取

偏心支承,或侧重局部接触和输出误差,对标准三曲柄双摆线轮减速器中曲柄轴转动、偏心轴承二维变形、摆线轮平面运动及输出扭转之间的耦合关系仍缺少统一描述。

此外,实际驱动过程中电动机与减速器之间存在双向动态作用,电流变化引起电磁转矩波动,而机械系统产生的输入轴速度波动又通过反电动势反馈至电流回路。对此,Feki等^[18]将电动机电磁模型与齿轮动力学模型联立;Jiang等^[19]、Yao等^[20]分别研究了电动机-齿轮系统的机电耦合共振及不同控制方式下的动态响应;E等^[21]将机电耦合分析拓展至精密摆线轮减速器。但是,若将电动机转矩简化为给定外部激励,则难以反映“速度波动-反电动势变化-电流扰动-电磁转矩波动”的反馈过程,也无法分析电动机参数对机械振动的影响。因此,有必要将电压、电流、反电动势和电磁转矩扰动与减速器全传动链振动统一建模。

基于此,本文以标准三曲柄双摆线轮精密摆线轮减速器为研究对象,采用小振动坐标法描述各构件相对于理想周期运动的动态位移,并基于拉格朗日方程建立了11自由度平面弯扭耦合动力学模型。模型考虑输入级齿轮副、曲柄轴、偏心轴承、双摆线轮及输出行星架之间的运动和受力关系,采用二维刚度-阻尼单元表征偏心轴承弹性作用,并通过单边接触函数描述摆线针齿副的时变接触特性;在此基础上,引入伺服电动机电压-电流-反电动势-电磁转矩增量关系,构建输入端机电耦合动力学方程,分析了误差激励、负载波动及电动机参数变化对输入轴振动、摆线轮平面运动和输出动态传动误差的影响,为揭示精密摆线轮减速器全传动链弯扭耦合及机电反馈机制提供理论基础。

1 精密摆线轮减速器传动链

1.1 系统描述与建模假设

精密摆线轮减速器由一级渐开线行星齿轮机构和二级摆线针轮机构组成。电动机转子与太阳轮刚性连接,太阳轮分别与3组行星轮啮合,各行星轮与对应曲柄轴刚性连接;曲柄轴通过偏心轴承支承两片摆线轮,摆线轮与固定针齿壳啮合;输出行星架与输出法兰刚性连接,共同构成系统输出构件。曲柄轴一方面随输出行星架绕减速器中心公转,另一方面相对输出行星架绕自身轴线自转。摆线轮-针齿啮合反力经偏心轴承和曲柄轴传递至输出行星架,从而形成输出转矩。输出法兰与行星架被视为同一刚体,模型中仅设置一个输出扭转自由度。固定坐标系 $O-XY$ 的原点位于减速器中心, x 轴水平向右, y 轴

竖直向上,平面转角逆时针为正。摆线轮平动动态位移 Δx_j 、 Δy_j 均在固定坐标系中描述。图1为建立的精密摆线轮减速器的传动链及主要构件示意图。

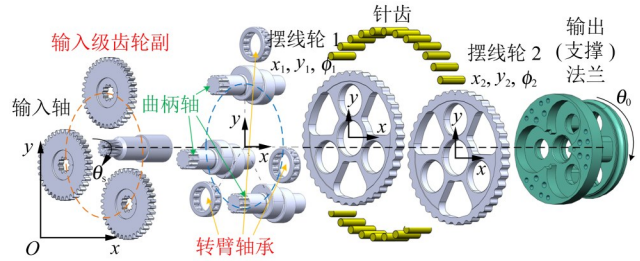


图1 精密摆线轮减速器传动链及主要构件示意图

Fig. 1 Transmission chain and main components of the precision cycloidal reducer

为兼顾模型的物理完整性与计算效率,作如下假设:

1. 减速器等效为平面集中参数系统,针齿壳和减速器壳体固定。
2. 电动机转子、输入轴和太阳轮刚性连接,仅考虑其扭转振动。
3. 行星轮与对应曲柄轴刚性连接,曲柄轴仅考虑相对输出行星架的自转振动。
4. 输出行星架与输出法兰视为同一输出构件,仅考虑扭转振动。
5. 两片摆线轮均视为平面刚体,每片摆线轮考虑2个平动自由度和1个面内转动自由度。
6. 输入级齿轮副采用时变啮合刚度-阻尼模型,偏心轴承采用二维等效弹性-阻尼模型。
7. 摆线轮-针齿副采用时变接触几何和单边法向接触模型。
8. 忽略构件轴向运动、曲柄轴弯曲、针齿销变形及壳体柔性。

9. 各机械构件的实际运动表示为参考周期运动与其附近动态弹性位移之和,电动机电流和输入电压采用相同的工作点增量描述。

1.2 广义坐标与参考运动

选取机械系统的11个广义坐标为

$$\mathbf{q} = [\Delta\theta_s \quad \Delta\theta_{cr,1} \quad \Delta\theta_{cr,2} \quad \Delta\theta_{cr,3} \quad \Delta x_1 \quad \Delta y_1 \quad \Delta\varphi_1 \quad \Delta x_2 \quad \Delta y_2 \quad \Delta\varphi_2 \quad \Delta\theta_o]^\top \quad (1)$$

式中, $\Delta\theta_s$ 为电动机转子-输入轴-太阳轮组合体的扭转动动态位移; $\Delta\theta_{cr,i}$ 为第 i 根曲柄轴相对输出行星架的自转动动态位移; Δx_j 、 Δy_j 、 $\Delta\varphi_j$ 分别为第 j 片摆线轮的平动和面内转动动态位移; $\Delta\theta_o$ 为输出行星架的扭转动动态位移。

图2所示为建立的11自由度平面弯扭耦合动力学模型。

将各机械构件的实际运动表示为稳态基准运动与其附近动态弹性位移之和。其中,基准运动所对

应的啮合几何和系统系数具有周期性, 即

$$\begin{cases} \theta_s = \theta_{s0} + \Delta\theta_s \\ \theta_o = \theta_{o0} + \Delta\theta_o \\ \theta_{cr,i} = \theta_{cr,0,i} + \Delta\theta_{cr,i} \end{cases} \quad (2)$$

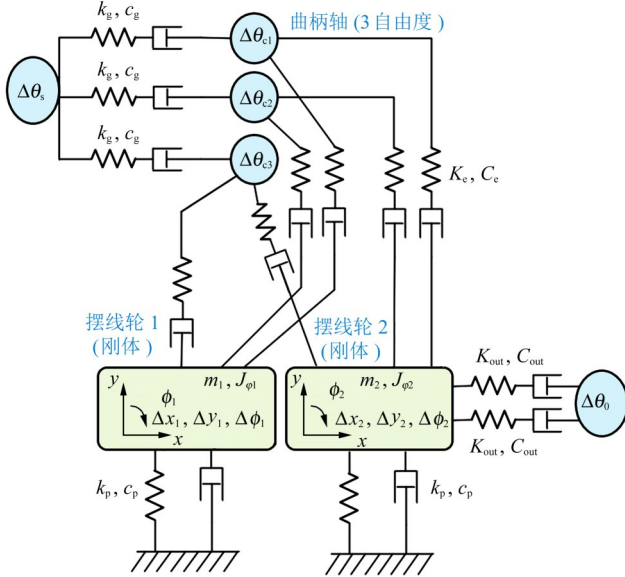


图2 11自由度平面弯扭耦合动力学模型示意图

Fig. 2 Schematic diagram of the 11-DOF planar bending-torsion coupled dynamic model

由于曲柄轴转角定义为相对输出行星架的自转角, 其绝对角位移为

$$\theta_{c,i}^{abs} = \theta_o + \theta_{cr,i} \quad (3)$$

相应的动态分量满足

$$\Delta\theta_{c,i}^{abs} = \Delta\theta_o + \Delta\theta_{cr,i} \quad (4)$$

根据一级行星齿轮机构的 Willis 关系, 有

$$z_s(\dot{\theta}_{s0} - \dot{\theta}_{o0}) + z_p\dot{\theta}_{cr,0,i} = 0 \quad (5)$$

式中, z_s 和 z_p 分别为太阳轮和行星轮齿数。

根据摆线针轮的啮合关系, 有

$$z_k\dot{\theta}_{o0} + (z_k - z_c)\dot{\theta}_{cr,0} = 0 \quad (6)$$

式中, z_k 为针齿数; z_c 为摆线轮齿数。

联立式(5)和式(6), 可得总传动比为

$$i_R = \frac{\dot{\theta}_{s0}}{\dot{\theta}_{o0}} = 1 + \frac{z_p z_k}{z_s(z_k - z_c)} \quad (7)$$

输出行星架的扭转角为

$$\theta_o(t) = \frac{1}{i_R} \theta_{s0}(t) + \Delta\theta_o \quad (8)$$

3根曲柄轴沿圆周均布, 则有

$$\beta_i = \frac{2\pi(i-1)}{3}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (9)$$

两片摆线轮的实际质心位置和姿态可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_{j0} + \Delta\mathbf{r}_j \\ \varphi_j = \varphi_{j0} + \Delta\varphi_j \end{cases} \quad (10)$$

式中, $\Delta\mathbf{r}_j = \begin{bmatrix} \Delta x_j \\ \Delta y_j \end{bmatrix}$ 。

定义平面旋转矩阵和反对称矩阵分别为

$$\mathbf{R}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则有

$$\frac{\partial \mathbf{R}(\psi)}{\partial \psi} = \mathbf{R}(\psi) \mathbf{S} \quad (11)$$

设 $\mathbf{d}_i$ 为第 i 根曲柄轴轴心在输出行星架固连坐标系中的位置矢量; $\mathbf{e}_{ij}$ 为曲柄轴上与第 j 片摆线轮对应的偏心矢量; $\mathbf{a}_{ij}$ 为摆线轮上相应偏心孔中心的位置矢量。则参考运动应满足偏心机构几何闭合关系, 即

$$\mathbf{r}_{j0} + \mathbf{R}(\varphi_{j0}) \mathbf{a}_{ij} = \mathbf{R}(\theta_{o0}) \mathbf{d}_i + \mathbf{R}(\theta_{c0,i}^{abs}) \mathbf{e}_{ij} \quad (12)$$

式中, $\theta_{c0,i}^{abs} = \theta_{o0} + \theta_{cr,0,i}$ 。对于相差 180° 安装的两片摆线轮, 可取 $\mathbf{e}_{i2} = -\mathbf{e}_{i1}$ 。

1.3 关键传动副动力学模型

1.3.1 输入级齿轮副

第 i 组太阳轮-行星轮副的法向动态变形可表示为

$$\delta_{gi} = \delta_{gi}^0(t) + r_{bs}(\Delta\theta_s - \Delta\theta_o) + r_{bp}\Delta\theta_{cr,i} - e_{gi}(t) \quad (13)$$

式中, r_{bs} 和 r_{bp} 分别为太阳轮和行星轮的等效基圆半径; $\delta_{gi}^0(t)$ 为参考状态下的基础啮合变形; $e_{gi}(t)$ 为综合啮合误差。

图3为太阳轮-行星轮副的法向动态变形示意图。

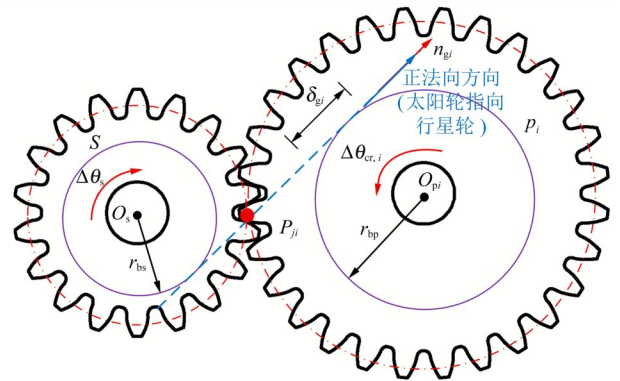


图3 输入级齿轮副动态变形示意图

Fig. 3 Schematic diagram of dynamic deformation of the input-stage gear pair

定义齿轮副变形映射向量 $\mathbf{a}_{gi} = \frac{\partial \delta_{gi}}{\partial \mathbf{q}}$, 则式(13)

可简写为

$$\delta_{gi} = \delta_{gi}^0(t) + \mathbf{a}_{gi}^T \mathbf{q} - e_{gi}(t) \quad (14)$$

输入级法向啮合力为

$$\mathbf{F}_{gi} = k_{gi}(t) \delta_{gi} + c_{gi} \dot{\delta}_{gi} \quad (15)$$

式中, $k_{gi}(t)$ 、 c_{gi} 分别为时变啮合刚度、等效啮合阻尼。

由虚功原理, 该齿轮副对应的广义力为

$$\mathbf{Q}_{gi} = -\mathbf{a}_{gi} \mathbf{F}_{gi} \quad (16)$$

若以额定受载周期运动为参考状态, 则机械增量方程中采用

$$\Delta F_{gi} = F_{gi} - F_{gi}^0 \quad (17)$$

式中, F_{gi}^0 为参考状态下的周期啮合力。

1.3.2 转臂轴承副

转臂轴承是建立摆线轮、曲柄轴与输出行星架之间动力学耦合的关键环节。

第 i 根曲柄轴轴心的绝对位置为

$$\mathbf{r}_{C_i} = \mathbf{R}(\theta_o) \mathbf{d}_i \quad (18)$$

第 i 根偏心轴承中心的绝对位置为

$$\mathbf{r}_{E_{ij}} = \mathbf{R}(\theta_o) \mathbf{d}_i + \mathbf{R}(\theta_o + \theta_{cr,i}) \mathbf{e}_{ij} \quad (19)$$

第 i 根摆线轮偏心孔中心的绝对位置为

$$\mathbf{r}_{H_{ij}} = \mathbf{r}_j + \mathbf{R}(\varphi_j) \mathbf{a}_{ij} \quad (20)$$

由偏心孔中心与转臂轴承中心的位置差, 并在参考运动附近保留 1 阶动态位移, 可得转臂轴承相对变形为

$$\Delta \delta_{eij} = \Delta \mathbf{r}_j + \mathbf{R}(\varphi_{j0}) \mathbf{S} \mathbf{a}_{ij} \Delta \varphi_j - \mathbf{R}(\theta_{o0}) \mathbf{S} \mathbf{d}_i \Delta \theta_o - \mathbf{R}(\theta_{o0}^{abs}) \mathbf{S} \mathbf{e}_{ij} (\Delta \theta_o + \Delta \theta_{cr,i}) \quad (21)$$

式(21)同时包含曲柄轴轴心随输出行星架公转产生的位移以及偏心矢量随曲柄轴绝对转动产生的位移, 从而保证了偏心机构几何耦合关系的完整性。图4即为转臂轴承的相对变形示意图。

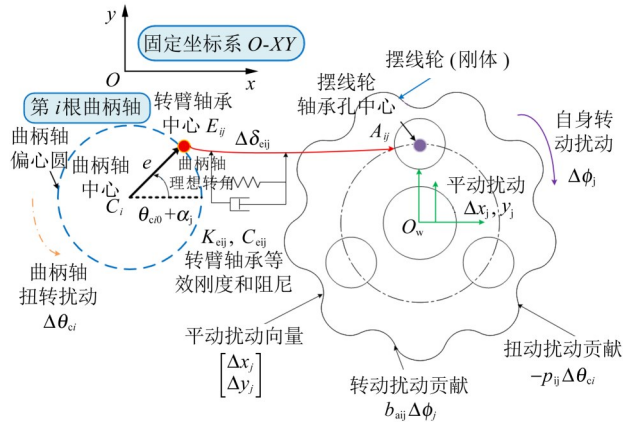


图4 转臂轴承相对变形示意图

Fig. 4 Schematic diagram of relative deformation of the eccentric bearing

定义时变变形映射矩阵 $\mathbf{A}_{eij}(t) = \frac{\partial \Delta \delta_{eij}}{\partial \mathbf{q}}$, 则

$$\begin{cases} \Delta \delta_{eij} = \mathbf{A}_{eij}(t) \mathbf{q} \\ \dot{\Delta \delta}_{eij} = \mathbf{A}_{eij}(t) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{A}}_{eij}(t) \mathbf{q} \end{cases} \quad (22)$$

转臂轴承等效作用力为

$$\mathbf{F}_{eij} = \mathbf{K}_{eij} \Delta \delta_{eij} + \mathbf{C}_{eij} \dot{\Delta \delta}_{eij} \quad (23)$$

式中, $\mathbf{K}_{eij}$ 和 $\mathbf{C}_{eij}$ 分别为转臂轴承二维等效刚度矩阵和阻尼矩阵, 其广义力为

$$\mathbf{Q}_{eij}^{(o)} = -\mathbf{A}_{eij}^T \mathbf{F}_{eij} \quad (24)$$

在低速条件下, 经量级分析后可忽略式(24)中

的 $\mathbf{A}_{eij} \mathbf{q}$ 项; 对于高速运行或参数激励分析, 则应保留该项。

1.3.3 摆线轮-针齿副

摆线轮与针齿之间的接触点和接触法向随啮合过程周期变化。设第 j 片摆线轮与第 k 个针齿之间的参考接触点位置和法向单位矢量分别为 $\mathbf{p}_{jk0}(t)$ 和 $\mathbf{n}_{jk0}(t)$, 则法向接触压缩量为

$$\delta_{pj k} = \delta_{pj k}^0(t) + \mathbf{n}_{jk0}^T(t) [\Delta \mathbf{r}_j + \mathbf{R}(\varphi_{j0}) \mathbf{S} \mathbf{p}_{jk0}(t) \Delta \varphi_j] - g_{pj k}(t) \quad (25)$$

式中, $\delta_{pj k}^0(t)$ 为参考状态下的基础接触压缩量; $g_{pj k}(t)$ 综合表征了初始间隙、齿廓修形和制造安装误差。图5为摆线轮啮合的法向变形示意图。

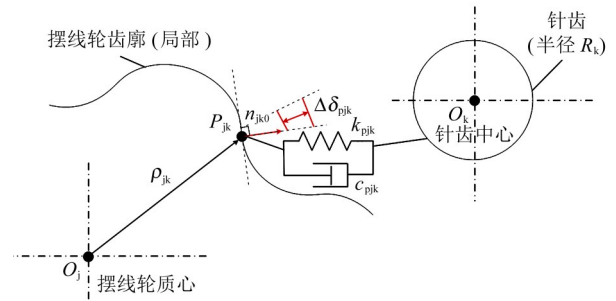


图5 摆线轮-针齿啮合法向变形示意图

Fig. 5 Schematic diagram of normal deformation of the cycloidal gear-pin meshing pair

定义接触变形映射向量 $\mathbf{a}_{pj k}(t) = \frac{\partial \delta_{pj k}}{\partial \mathbf{q}}$, 则

$$\begin{cases} \delta_{pj k} = \delta_{pj k}^0(t) + \mathbf{a}_{pj k}^T(t) \mathbf{q} - g_{pj k}(t) \\ \dot{\delta}_{pj k} = \dot{\delta}_{pj k}^0 + \mathbf{a}_{pj k}^T \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{a}}_{pj k}^T \mathbf{q} - \dot{g}_{pj k} \end{cases} \quad (26)$$

考虑针齿副仅能传递压缩力, 引入 Macaulay, 则法向接触力可表示为

$$\begin{cases} F_{pj k} = \langle k_{pj k}(t) \langle \delta_{pj k} \rangle + c_{pj k} \chi_{pj k} \dot{\delta}_{pj k} \rangle \\ \chi_{pj k} = \begin{cases} 1, & \delta_{pj k} > 0 \\ 0, & \delta_{pj k} \leq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (27)$$

式中, $c_{pj k}$ 为法向接触阻尼。

式(27)保证 $F_{pj k} \geq 0$, 避免接触阻尼在分离阶段产生非物理拉力。该接触点对应的广义力为

$$\mathbf{Q}_{pj k} = -\mathbf{a}_{pj k}(t) F_{pj k} \quad (28)$$

采用额定周期状态附近的增量模型, 则

$$\Delta \mathbf{F}_{pj k} = \mathbf{F}_{pj k} - \mathbf{F}_{pj k}^0 \quad (29)$$

1.3.4 输出转矩传递关系

输出转矩由输入级啮合和偏心轴承共同作用传递至输出行星架。偏心轴承作用力对输出自由度产生的广义转矩为

$$Q_{eij}^{(o)} = -\left(\frac{\partial \Delta \delta_{eij}}{\partial \Delta \theta_o} \right)^T \mathbf{F}_{eij} \quad (30)$$

由式(21)可得

$$\frac{\partial \Delta \delta_{eij}}{\partial \Delta \theta_o} = -R(\theta_{o0}) S d_i - R(\theta_{c0,i}^{abs}) S e_{ij} \quad (31)$$

因而

$$Q_{eij}^{(o)} = [R(\theta_{o0}) S d_i + R(\theta_{c0,i}^{abs}) S e_{ij}]^T F_{eij} \quad (32)$$

由式(32)可知, 摆线轮-针齿啮合反力经转臂轴承传递后, 分别通过曲柄轴轴心位置矢量和偏心矢量对输出行星架形成广义转矩。

2 机械耦合系统动力学方程

2.1 系统动能与惯性耦合

在小动态位移假设下, 机械系统动能可表示为

$$T = \frac{1}{2} (J_s + J_m) \Delta \dot{\theta}_s^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 J_{ci} (\Delta \dot{\theta}_o + \Delta \dot{\theta}_{cr,i})^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 [m_j \Delta \dot{\mathbf{r}}_j^T \Delta \dot{\mathbf{r}}_j + J_{\phi j} \Delta \dot{\phi}_j^2] + \frac{1}{2} J_o^{eq} \Delta \dot{\theta}_o^2 \quad (33)$$

式中, J_m 为电动机转子惯量; J_s 为输入轴和太阳轮等效惯量; J_{ci} 为第 i 根曲柄轴及对应行星轮绕自身轴线的等效自转惯量; m_j 、 $J_{\phi j}$ 分别为第 j 片摆线轮的质量和转动惯量; J_o^{eq} 为输出行星架、输出法兰及随其公转构件的等效输出惯量。

由 $T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}$ 可获得机械系统质量矩阵 $\mathbf{M}$ 。由于曲柄轴采用相对输出行星架的转角坐标, 其动能中存在交叉项 $J_{ci} \Delta \dot{\theta}_o \Delta \dot{\theta}_{cr,i}$, 因此, $M_{\theta_{cr,i} \theta_o} = M_{\theta_o \theta_{cr,i}} = J_{ci}$, 且

$$M_{\theta_o \theta_o} = J_o^{eq} + \sum_{i=1}^3 J_{ci} \quad (34)$$

则输入端质量矩阵对应项为

$$M_{\theta_s \theta_s} = J_s + J_m \quad (35)$$

式中, J_o^{eq} 为应包含曲柄轴、行星轮及相关附件随输出行星架公转产生的轨道惯量, 但不应重复计入已由 J_{ci} 表征的自转惯量。

2.2 机械动力学方程

由于 $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{11}$, 可定义输入端和输出端选择向量分别为

$$\mathbf{b}_s = [1, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^{11}$$

$$\mathbf{b}_o = [0, \dots, 0, 1]^T \in \mathbb{R}^{11}$$

式中, $\mathbf{b}_s^T \mathbf{q} = \Delta \theta_s$; $\mathbf{b}_o^T \mathbf{q} = \Delta \theta_o$ 。

电动机电磁转矩、输入端机械阻尼转矩和输出负载转矩分别作用于 $\Delta \theta_s$ 、 $\Delta \theta_o$ 。采用拉格朗日方程及虚功原理, 机械系统动力学方程可表示为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}_s (\Delta T_e - B_m \Delta \dot{\theta}_s) - \mathbf{b}_o \Delta T_L + \mathbf{Q}^{\text{ref}}(t) - \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_{gi} \Delta F_{gi} - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \mathbf{A}_{eij}^T \Delta F_{eij} - \sum_{j=1}^2 \sum_{k \in \Omega_j(t)} \mathbf{a}_{pj k} \Delta F_{pj k} \quad (36)$$

式中, B_m 为电动机及输入轴等效黏性阻尼; ΔT_e 为电磁转矩增量; ΔT_L 为输出负载转矩增量; $\mathbf{Q}^{\text{ref}}(t)$ 为参考运动引起的惯性项; $\Omega_j(t)$ 为第 j 片摆线轮的候选

接触针齿集合。

若参考状态取为额定受载周期稳态解, 则参考状态已满足动力学平衡, 各零阶作用力相互抵消, 可令 $\mathbf{Q}^{\text{ref}}(t) = 0$, 此时, 式(36)构成参考周期状态附近的机械增量动力学方程。

2.3 输入端机电耦合模型

电动机电磁系统与减速器机械系统通过电磁转矩和转子角速度双向耦合, 电动机电流决定输入电磁转矩, 输入轴角速度又通过反电动势影响电流响应。以直流电动机或等效直流伺服电动机模型为例, 电动机电压平衡方程为

$$L_m \dot{i}_m + R_m i_m + k_e \dot{\theta}_s = u_m(t) \quad (37)$$

电磁转矩为

$$T_e = k_t i_m \quad (38)$$

式中, L_m 、 R_m 分别为电动机等效电感和电阻; i_m 为电动机电流; u_m 为驱动电压; k_e 为反电动势系数; k_t 为转矩系数。

为与机械系统的参考运动分解保持一致, 令

$$\begin{cases} i_m = i_{m0} + \Delta i_m \\ u_m = u_{m0} + \Delta u_m \\ \dot{\theta}_s = \dot{\theta}_{s0} + \Delta \dot{\theta}_s \end{cases}$$

参考电气状态满足

$$L_m \dot{i}_{m0} + R_m i_{m0} + k_e \dot{\theta}_{s0} = u_{m0} \quad (39)$$

因此, 工作点附近的电气增量方程为

$$L_m \Delta \dot{i}_m + R_m \Delta i_m + k_e \Delta \dot{\theta}_s = \Delta u_m \quad (40)$$

电磁转矩增量为

$$\Delta T_e = k_t \Delta i_m \quad (41)$$

由式(36)、式(37)可见, 机电耦合具有明确的双向作用, 如图6、图7所示。

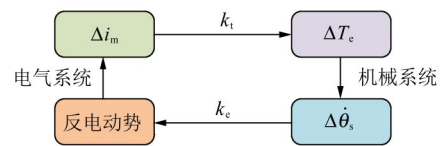


图6 机电耦合流程图

Fig. 6 Flowchart of electromechanical coupling

因此, 仅将电动机转矩作为预先给定的外部激励不能完整描述输入端动态特性, 必须将电流状态与机械振动方程联立求解。

2.4 机电耦合系统统一方程

将式(41)代入式(36), 并定义内部恢复力向量, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = & \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_{gi} \Delta F_{gi} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \mathbf{A}_{eij}^T \Delta F_{eij} + \\ & \sum_{j=1}^2 \sum_{k \in \Omega_j(t)} \mathbf{a}_{pj k} \Delta F_{pj k} \end{aligned} \quad (42)$$

则机械方程可写为

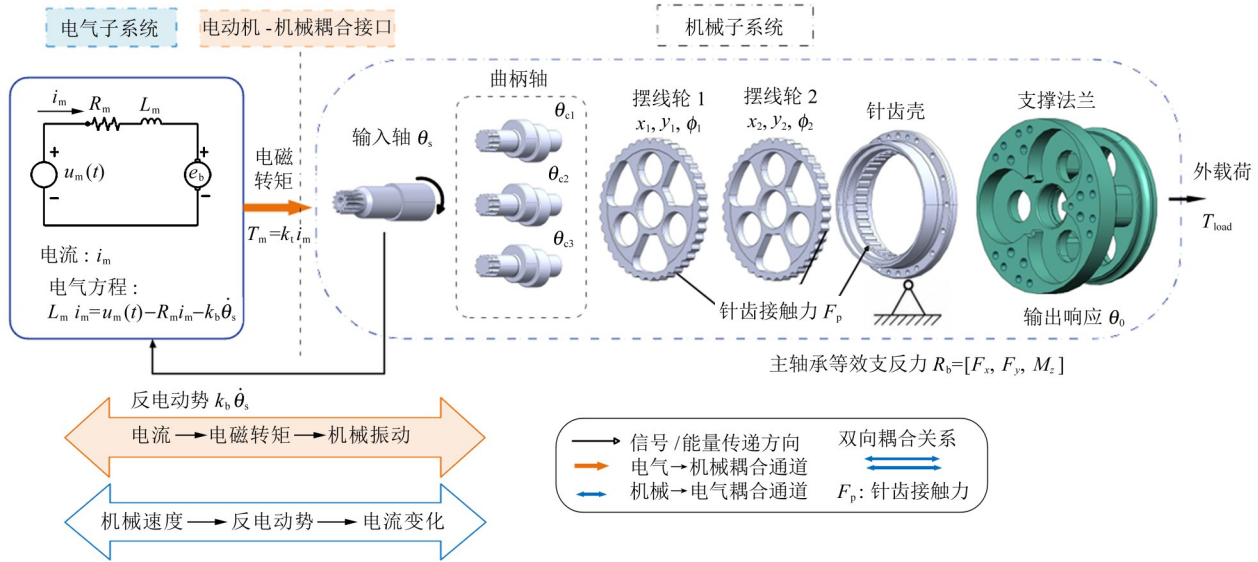


图7 机电耦合原理图
Fig. 7 Schematic diagram of the electromechanical coupling principle

$$M\ddot{q} + B_m b_s b_s^T \dot{q} + f_{int}(q, \dot{q}, t) - k_t b_s \Delta i_m = -b_o \Delta T_L + Q^{ref}(t) \quad (43)$$

由于 $\Delta \dot{\theta}_s = b_s^T \dot{q}$ ，电气方程可写为

$$L_m \Delta \dot{i}_m + R_m \Delta i_m + k_e b_s^T \dot{q} = \Delta u_m \quad (44)$$

联立式(43)、式(44)，得到精密摆线减速器机电耦合动力学方程为

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0^T & L_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \Delta \dot{i}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_m b_s b_s^T & -k_t b_s \\ k_e b_s^T & R_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \Delta i_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{int}(q, \dot{q}, t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_o \Delta T_L + Q^{ref}(t) \\ \Delta u_m \end{bmatrix} \quad (45)$$

式(45)中，机械子系统包含11个机械自由度，电动机电流 Δi_m 为附加电气状态变量，不计入机械自由度。机电耦合矩阵中的 $-k_t b_s$ 表征电流变化通过电磁转矩对机械系统的驱动作用，而 $k_e b_s^T$ 表征输入轴转速波动通过反电动势对电气系统的反馈作用。内部恢复力 f_{int} 同时包含输入级时变啮合、偏心轴承二维弹性耦合和摆线针齿单边接触作用。因此，式(45)构成一个包含电磁反馈、惯性耦合、时变参数和接触状态切换的非线性机电耦合动力学系统。

3 动力学求解与结果讨论

3.1 求解参数与工况设置

为分析所建模型的动态响应特性，以纳博特斯克 RV-80E 作为算例。典型参数包括：总传动比 $i = 121$ ，输入级传动比 $i_1 = 3$ ，曲柄偏心距 $e = 1.5 \text{ mm}$ ，输入转速 $n_s = 1215 \text{ r/min}$ ，平均输出负载力矩 $T_0 = 800 \text{ N}\cdot\text{m}$ ，负载脉动力矩幅值为平均载荷的5%。输入级采用复合误差激励模型，其代表性误差幅值范围为 $0.5 \sim 5.6 \text{ }\mu\text{m}$ ，摆线针齿误差幅值采用 $0.6 \text{ }\mu\text{m}$ 的谐波误差。电动机参数取 $R_m = 0.85 \text{ }\Omega$ ， $L_m = 8.0 \text{ mH}$ ，

$k_t = k_e = 1.2$ ，并通过静态偏置电流补偿平均负载。其余参数如表1所示。

表1 精密摆线减速器及电动机主要参数

Tab. 1 Main parameters of the precision cycloidal reducer and motor

参数	数值
总传动比 i	121
输入级传动比 i_1	3
太阳轮齿数 z_s	12
行星轮齿数 z_p	36
模数 m/mm	1.25
摆线轮齿数 z_c	39
针齿数 z_k	40
偏心距 e/mm	1.5
输入转速 $n_s/(\text{r/min})$	1215
输入轴转动惯量 $J_s/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	1.94985×10^{-3}
单根曲柄轴转动惯量 $J_{ci}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	1.12407×10^{-3}
单片摆线轮质量 m_j/kg	0.658
单片摆线轮转动惯量 $J_{wj}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	2.36092×10^{-3}
输出侧等效转动惯量 $J_{oec}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	1.085203×10^{-2}
平均输出负载力矩 $T_0/(\text{N}\cdot\text{m})$	800
输入级误差激励最大单项幅值 $e_{g,\max}/\mu\text{m}$	5.6
摆线针齿谐波误差幅值 $e_{p0}/\mu\text{m}$	0.6
电动机电阻 R_m/Ω	0.85
电动机电感 L_m/mH	8.0
转矩系数 $k_t/(\text{N}\cdot\text{m/A})$	1.20
反电动势系数 $k_e/(\text{V}\cdot\text{s/rad})$	1.20
电动机转子转动惯量 $J_m/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	1.0×10^{-3}
输入端机械阻尼 $B_m/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s/rad})$	0.15
基准负载波动系数 λ_T	0.05

数值求解采用时域积分方法，在每一积分步内

实时更新接触状态函数、时变刚度及各接触副相对变形。为减小初始瞬态的影响, 后续分析均基于稳态响应进行。为评价系统动态特性, 选取输入轴扭转振动、摆线轮中心平面位移和输出传动误差作为主要响应指标。其中, 输出传动误差定义为

$$e_o = \Delta\theta_o - \Delta\theta_s / i \quad (46)$$

3.2 基准工况下的响应特征

3.2.1 动态响应特征

本文所称基准工况是指输入转速为 1 215 r/min、平均输出负载为 800 N·m、负载波动系数为 5%、输入级齿轮精度为 5 级、摆线针齿谐波误差幅值为 0.6 μm 、电动机电阻为 0.85 Ω 、电感为 8 mH、转矩系数和反电动势系数均为 1.20 的运行状态。基准工况下, 输入级齿轮副和摆线针齿副的接触刚度均随啮合位置发生周期性变化, 摆线针齿副还伴随多齿接触数量和接触位置的周期切换。因此, 系统响应同时受到时变刚度、偏心支承、多齿接触和单边接触非线性影响, 整体表现出周期波动与局部高频扰动并存的特征。

图 8 所示为输入轴角速度波动幅频特性谱。由图 8 可见, 输入轴角速度增量的频谱由低频离散成分和输入级齿轮啮合频率成分共同组成, 频谱能量主要集中在 80 Hz 以下。低频范围内分布有多条离散谱线, 反映了输入轴转频及其调制作用; 在输入级齿轮啮合频率 f_g 附近出现最显著的主峰, 表明输入级齿轮啮合激励是输入端角速度波动的主要来源。随着频率升高, 高阶倍频响应逐渐减弱, 说明高阶啮合成分在传动系统中的贡献相对有限。

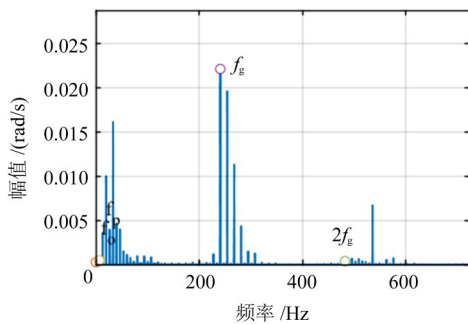


图 8 输入轴角速度波动幅频特性谱

Fig. 8 Amplitude-frequency spectrum of the input shaft angular velocity fluctuation

从定量结果看, 在 16、27、37、48、59、69 Hz 附近均可观察到离散峰值。其中, 齿轮啮合频率 f_g 附近的响应幅值约为 0.153 rad/s, 明显高于多数低频分量; 在 $2f_g$ 附近仍可辨识出次级响应, 但其幅值已显著衰减。上述结果说明, 输入轴角速度波动并非仅由低阶转动频率控制, 输入级齿轮啮合及其调

制效应对输入端动态响应具有重要影响。

图 9 所示为摆线轮 1 质心在 1 个完整输出周期内的面内运动轨迹。可以看出, 摆线轮质心轨迹整体呈近似闭合的类椭圆环带, 起点和终点基本重合, 表明系统在基准工况下已进入较稳定的周期运动状态。轨迹的主体形态较为规则, 但环带边界具有一定厚度, 并叠加局部细微起伏, 说明摆线轮面内运动以偏心支承引起的周期轨道运动为主, 同时受到针齿接触切换和结构弹性变形所引起的高频微扰。

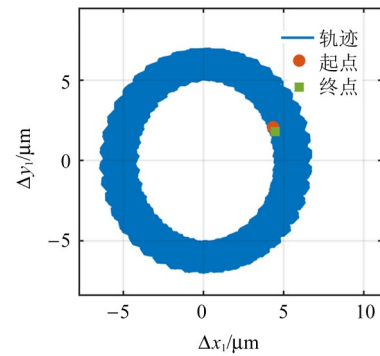


图 9 摆线轮 1 面内运动相轨迹

Fig. 9 In-plane motion phase trajectory of cycloidal gear 1

从位移范围看, 摆线轮 1 水平方向动态位移 Δx_1 约分布在 $-8 \sim 8 \mu\text{m}$, 竖直方向动态位移 Δy_1 约分布在 $-9 \sim 9 \mu\text{m}$ 。竖直方向的波动范围略大于水平方向, 反映出偏心支承方向、针齿接触位置和瞬时载荷分配对两个平动方向的作用存在一定差异。

图 10 所示为输出法兰动态传动误差时域响应。由图 10 可知, 输出法兰动态传动误差随时间呈现较明显的周期性变化。其时域波形并未出现幅值特别突出的孤立尖峰, 而是表现为低频包络上叠加连续高频细波动的复合响应特征。其中, 低频包络主要与输出周期运动和负载变化有关, 高频细波动则主要来源于输入级齿轮啮合、摆线针齿多齿接触切换及瞬时载荷重新分配。

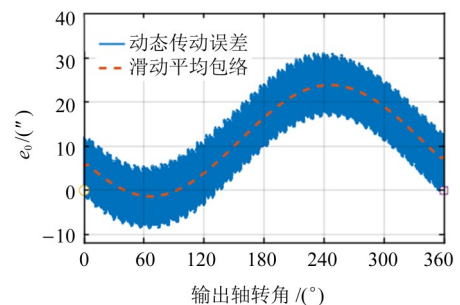


图 10 输出法兰动态传动误差时域响应

Fig. 10 Time-domain response of the dynamic transmission error of the output flange

对图 10 中的稳态响应进行统计可得，原始动态传动误差的平均值为 4.613 61″。去除平均值后，其中心化分量最大值为 23.039 43″，最小值为 -23.835 30″，峰峰值约为 46.88″。由此可知，基准工况下输出动态传动误差在零值两侧近似对称波动，但负向极值的绝对值略大于正向极值。

综合图 8~图 10 可知，输入级齿轮啮合主要决定输入轴角速度波动的频率组成；曲柄轴和偏心轴承将输入端扭转波动转换为摆线轮质心的面内复合运动；摆线针齿副的多齿接触和周期性接触切换进一步将局部高频扰动传递至输出端，最终形成具有低频包络和高频波动叠加特征的输出动态传动误差。

3.2.2 数值收敛性与工程合理性验证

为检验数值积分时间步长对动态传动误差计算结果的影响，在其他模型参数和运行工况保持不变的条件下，分别采用 1.0×10^{-5} 、 5.0×10^{-6} 、 2.5×10^{-6} s 等 3 种时间步长进行完整输出周期计算。将 1 个稳定输出周期内动态传动误差最大值与最小值之差定义为峰峰值，即

$$e_{pp} = \max[e_o(t)] - \min[e_o(t)] \tag{47}$$

基准工况下，动态传动误差最大值为 23.04″，最小值为 -23.84″，对应峰峰值为 46.88″。

不同时间步长下的动态传动误差曲线如图 11 所示，计算结果如表 2 所示。3 组曲线在整个输出周期内基本重合。

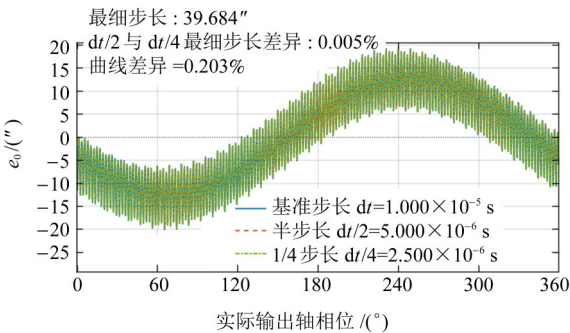


图 11 动态传动误差时间步长的收敛性

Fig. 11 Convergence of the time step size for the dynamic transmission error

表 2 动态传动误差的时间步长收敛性对比

Tab. 2 Comparison of time-step convergence for the dynamic transmission error

时间步长/s	动态传动误差峰峰值/(″)	均方根值/(″)	相对最细步长的峰峰值差异/%
1.0×10^{-5}	46.88	9.972 58	2.63
5.0×10^{-6}	46.69	9.972 52	2.21
2.5×10^{-6}	45.68	9.972 49	0

以最细时间步长 2.5×10^{-6} s 的结果为参考，基准时间步长和二分之一时间步长下，峰峰值的相对差异分别为 2.63%、2.61%。同时，3 种时间步长下均方根值的最大相对差异小于 0.001%，表明动态传动误差的幅值和周期变化规律均已达到稳定状态。综合计算精度与计算效率，后续完整周期仿真采用 1.0×10^{-5} s 作为时间步长。

在确认计算结果具有时间步长收敛性的基础上，进一步将基准工况下的动态传动误差与公开试验结果进行对比，以评价模型预测结果的工程合理性。如表 3 所示，Wang 等^{[22][11-12]}研究的 RV 减速器样机采用 39 齿摆线轮、40 针齿、三曲柄结构，总传动比为 81，额定输出转矩为 784 N·m。该样机的摆线轮齿数、针齿数、曲柄轴数量及负载水平与本文研究对象较为接近，因而具有一定的工程可比性。

表 3 与公开试验结果的对比

Tab. 3 Comparison with public test results

对比指标	本文的基准工况	Wang 等的试验
误差指标	动态传动误差峰峰值	单向传动误差范围
正向或计算结果	46.88″	40″
反向试验结果	—	42″
与本文结果的差异	—	17.2%/11.6%

文献[22]^[11-12]中的试验台角度测量精度为 2″，试验过程中通过磁粉制动器将输出端加载至 784 N·m，测得正向和反向单向传动误差分别约为 40 和 42″。本文基准工况的平均输出负载为 800 N·m，采用后续仿真所选取的 1.0×10^{-5} s 时间步长时，计算得到的动态传动误差峰峰值为 46.88″。相对于文献中的 40″、42″，本文计算结果的数值差异分别约为 17.2%、11.6%。具体对比如表 4 所示。

表 4 动态传动误差的公开试验结果对比

Tab. 4 Comparison of published test results for the dynamic transmission error

对比指标	本文的基准工况	Wang 等的试验
总传动比	121	81
曲柄轴数量	3	3
摆线轮齿数/针齿数	39/40	39/40
输出负载/(N·m)	800	784

需要指出的是，本文采用的动态传动误差峰峰值与文献中的正、反向单向传动误差在统计方式上并不完全相同，两项研究在总传动比、输入转速、齿廓修形、制造误差和试验边界条件等方面也存在差异。因此，该对比不是同型号、同工况下的严格试验验证，而仅用于考察计算结果的幅值范围和数量级。本文计算结果与公开试验结果均处于约 40″的

范围, 未出现明显的数量级偏差。结合时间步长收敛性分析, 可以认为所建立动力学模型具有较好的数值稳定性, 其动态传动误差预测结果具备一定的工程合理性。

3.3 误差激励与负载波动对动态传动误差的影响

为研究不同激励因素对输出动态精度的影响, 在保持其他参数不变的条件下, 分别增大输入级渐开线齿轮误差、摆线针齿制造与修形误差以及外部负载波动幅值, 并将各工况下的输出动态传动误差与基准工况进行对比。

图 12 所示为渐开线齿轮误差和摆线针齿误差对输出动态传动误差的影响。由图 12 可知, 增大输入级渐开线齿轮误差和摆线针齿误差后, 输出动态传动误差仍保持与基准工况相近的周期变化特征, 但波动幅值和局部峰谷值均发生不同程度的变化。当输入级渐开线齿轮精度由 5 级降低至 7 级时, 输出动态传动误差曲线的正向峰值明显升高, 而负向谷值变化相对较小, 整体波动范围有所扩大。这表明, 输入级齿轮误差能够沿太阳轮、行星轮、曲柄轴和偏心轴承组成的传动路径传递至输出端, 但其影响在后续摆线级多齿啮合过程中受到一定程度的均化和衰减。

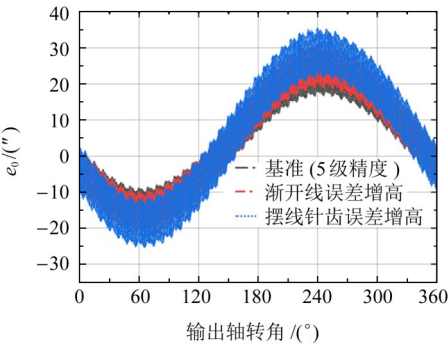


图 12 渐开线齿轮误差和摆线针齿误差对输出动态传动误差的影响
Fig. 12 Effects of involute gear error and cycloidal gear-pin error on the output dynamic transmission error

相比之下, 摆线针齿制造与修形误差增大后, 输出动态传动误差曲线的正向峰值显著升高, 负向谷值也进一步加深, 整个时域波形的上下包络均明显扩展。其影响范围和幅值均大于输入级齿轮误差工况, 说明摆线针齿副误差能够直接改变参与啮合的针齿数量、接触位置和瞬时载荷分配, 对输出动态传动误差产生更直接的放大作用。

图 13 所示为负载周期波动对动态传动误差的幅值调制效应。由图 13 可知, 当外部负载波动幅值由平均负载的 5% 增大至 25% 时, 输出动态传动误差的基本周期特征未发生明显改变, 但曲线包络范围有

所扩大, 并表现出更加明显的低频幅值调制现象。与两类内部几何误差相比, 负载波动主要改变误差曲线的局部幅值和负向谷值, 对正向峰值的放大作用相对有限。这是因为外部负载波动并不直接改变齿面几何关系, 而是通过改变各接触副的瞬时受力状态、接触压缩量和多齿载荷分配, 间接调制输出动态传动误差。因此, 其作用主要体现为原有周期响应幅值的缓慢变化, 而不是产生新的显著高频波动形式。

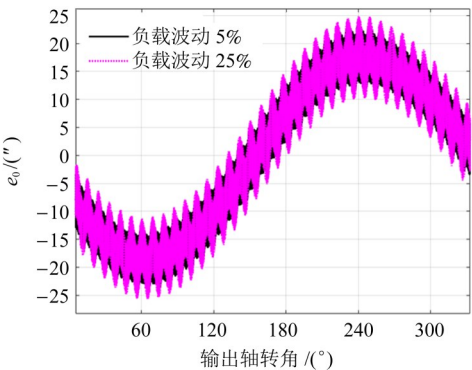


图 13 负载周期波动对动态传动误差的幅值调制效应
Fig. 13 Amplitude modulation effect of periodic load fluctuation on the dynamic transmission error

为进一步定量比较上述 3 类因素的影响, 根据图 12、图 13 所示不同因素对传动误差的影响曲线, 分别提取各工况下动态传动误差的最大值、最小值和峰峰值, 结果如表 5 所示。由表 5 可知, 当输入级渐开线齿轮精度由 5 级降低至 7 级时, 动态传动误差最大值由 23.04" 增至 31.16", 增幅为 35.24%; 最小值由 -23.84" 变化为 -21.52", 其绝对值减小 9.73%; 峰峰值由 46.88" 增至 52.68", 增幅为 12.37%。该结果进一步说明, 输入级齿轮误差主要放大输出动态传动误差的正向峰值, 而对整体波动范围的影响相对有限。

表 5 不同误差与负载工况下的动态传动误差对比
Tab. 5 Comparison of dynamic transmission errors under different error and load conditions

工况	最大值/ (")	最小值/ (")	峰峰值/ (")	相对基准 变化/%
基准工况	23.04	-23.84	46.88	—
渐开线齿轮误差增大 (5 级→7 级)	31.16	-21.52	52.68	+12.37
摆线针齿制造与 修形误差增大	35.63	-25.57	61.20	+30.55
负载波动增大 (5%→25%)	24.89	-25.72	50.61	+7.96

当摆线针齿制造与修形误差增大时, 动态传动误差最大值升至 35.63", 较基准工况增加 54.64%; 最小值降至 -25.57", 其绝对值增加 7.26%; 峰峰值

扩大至61.20", 较基准工况提高30.55%。与输入级齿轮误差相比, 摆线针齿误差不仅显著提高正向峰值, 同时还加深负向谷值, 因而对输出动态传动误差波动范围的放大作用更为明显。摆线针齿副是减速器核心传动环节, 其制造与修形误差直接影响多齿接触状态和瞬时载荷分配, 因此, 是制约输出动态精度的主要内部误差源。

当负载波动幅值由5%增至25%时, 动态传动误差最大值由23.04"增至24.89", 增幅为8.03%; 最小值降至-25.72", 其绝对值增加7.89%; 峰峰值增至50.61", 较基准工况提高7.96%。负载波动对正向峰值和负向谷值的影响较为接近, 主要表现为误差波动范围的小幅扩大, 其总体影响弱于两类内部几何误差。

若以动态传动误差峰峰值相对基准工况的增幅作为综合评价指标, 则3类因素对输出动态误差的敏感性大小规律为: 摆线针齿误差(30.55%)>输入级齿轮误差(12.37%)>负载波动(7.96%)。

综合图12、图13、表5可知, 摆线针齿副是决定减速器输出动态精度的关键环节, 其制造精度和修形质量对动态传动误差影响最为显著; 输入级渐开线齿轮误差虽然能够传递至输出端, 但其影响在多级传动和多齿接触过程中有所衰减; 外部负载波动则主要通过调制瞬时接触状态和载荷分配, 对输出动态传动误差产生附加扰动。

3.4 电动机参数变化对机电耦合振动的影响

在机电耦合条件下, 输入轴速度波动通过反电动势项反馈至电流回路, 使电动机电流中除电气输入频率外, 还包含与机械转动和齿轮啮合过程相关的频率成分; 电流波动又通过电磁转矩反馈至输入轴, 形成“输入轴速度波动-反电动势变化-电流波动-电磁转矩扰动”的双向反馈通道。为分析不同电动机参数对该反馈过程的影响, 分别改变电动机转子惯量、输入端机械阻尼和绕组电感, 并比较输入轴角加速度和电流纹波的变化。

图14所示为电动机转子惯量和机械阻尼对输入轴角加速度波动的影响。由图14可知, 增大电动机转子惯量后, 输入轴角加速度曲线中的高频细波动有所减弱, 响应包络略有收缩, 但周期性峰谷和局部冲击仍然存在, 说明增大转子惯量能够对快速变化的振动成分产生一定惯性滤波作用, 但难以完全抑制由时变啮合和接触状态切换引起的周期性扰动。

相比之下, 增大输入端机械阻尼后, 输入轴角加速度曲线的正向峰值和负向谷值均明显减小, 整个波动包络显著收缩, 高频振动和局部冲击均得到

较强抑制。因此, 在当前参数范围内, 机械阻尼对输入端振动幅值的控制作用明显强于转子惯量。

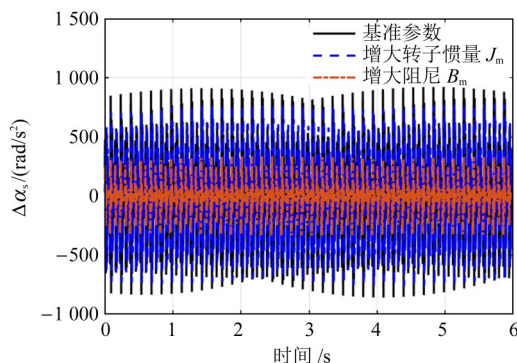


图14 电动机转子惯量和机械阻尼对输入轴角加速度波动的影响

Fig. 14 Effects of motor rotor inertia and mechanical damping on the input shaft angular acceleration fluctuation

从定量结果来看, 基准参数下, $\Delta\alpha_x$ 的主要波动范围约为 $-0.86 \times 10^3 \sim 0.92 \times 10^3 \text{ rad/s}^2$, 峰峰值约为 $1.78 \times 10^3 \text{ rad/s}^2$; 增大 J_m 后, 其波动范围约为 $-0.76 \times 10^3 \sim 0.78 \times 10^3 \text{ rad/s}^2$, 峰峰值降至约 $1.54 \times 10^3 \text{ rad/s}^2$, 降幅约为13.5%。相比之下, 增大输入端机械阻尼 B_m 后, $\Delta\alpha_x$ 的波动范围显著收缩至约 $-0.33 \times 10^3 \sim 0.33 \times 10^3 \text{ rad/s}^2$, 峰峰值降至约 $0.66 \times 10^3 \text{ rad/s}^2$, 较基准工况降低约62.8%。由此表明, 提高机械阻尼能够更有效地耗散输入端振动能量, 其振动抑制效果明显优于单纯增大电动机转子惯量。

由图15可见, 降低电动机绕组电感后, 电流波形的整体变化趋势基本保持不变, 但曲线中的高频纹波和局部尖峰明显增强, 电流上下包络均有所扩大。这说明, 绕组电感主要影响电流回路对高频机械反馈信号的滤波能力, 而不会从根本上改变由机械啮合和转动过程决定的主要波动周期。

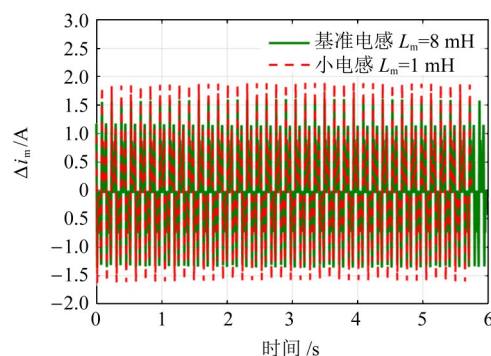


图15 绕组电感对反馈电流纹波的滤波效应

Fig. 15 Filtering effect of winding inductance on the feedback current ripple

当电动机绕组电感由8 mH降低至1 mH时, 电流波动范围由约-1.3~1.6 A扩大至约-1.6~1.9 A, 峰峰值由约2.9 A增至约3.5 A, 增幅约为21%。较大

的绕组电感能够削弱反电动势波动所引起的高频电流响应,从而降低电流纹波;但绕组电感过大也可能降低电流和电磁转矩对控制指令的快速跟随能力。

由图 14、图 15 可知,电动机转子惯量主要通过惯性作用削弱输入轴角加速度的快速变化;输入端机械阻尼主要通过能量耗散降低机械振动幅值;而绕组电感主要决定电流回路对高频机械扰动的滤波能力。因此,精密摆线减速器驱动电动机的参数匹配应同时兼顾机械振动抑制能力、电流纹波水平和电磁转矩动态响应,避免仅通过增大某一单项参数改善局部性能。

4 结论

以标准三曲柄双摆线轮精密摆线减速器为研究对象,建立了考虑输入级齿轮啮合、偏心轴承二维支承、摆线针齿多齿接触及电动机电磁反馈的机电耦合动力学模型,分析了基准工况、误差激励、负载波动及电动机参数对系统动态响应的影响。得出以下主要结论:

1) 基于小振动坐标法和拉格朗日方程,建立了 11 自由度平面弯扭耦合动力学模型,并引入电动机电压-电流-电磁转矩增量关系,实现了机械振动与电磁响应的双向耦合描述。模型能够表征输入扭转、摆线轮面内运动与输出扭转之间的动力传递关系。

2) 基准工况下,输入轴角速度波动在齿轮啮合频率附近出现主峰,摆线轮质心呈近闭合类椭圆轨迹,输出动态传动误差表现为低频包络与高频波动叠加。其最大值、最小值、峰峰值分别为 23.04"、-23.84"、46.88"。

3) 输入级齿轮误差、摆线针齿误差和负载波动均会增大输出动态传动误差,其峰峰值较基准工况分别提高 12.37%、30.55%、7.96%。其中,摆线针齿误差对输出动态精度影响最显著,是主要内部误差源;输入级齿轮误差在多级传动过程中有所衰减,负载波动则主要起幅值调制作用。

4) 电动机参数对机电耦合响应具有不同影响。增大转子惯量可削弱高频角加速度波动,增大机械阻尼可显著降低输入端振动幅值;当绕组电感由 8 mH 降至 1 mH 时,电流纹波峰峰值增加约 21%,表明绕组电感对高频机械扰动具有滤波作用。

本研究揭示了精密摆线减速器机械传动与电磁反馈之间的耦合机制,可为摆线针齿误差控制、减速器动态精度提升及机电参数协同优化提供依据。

参 考 文 献

- [1] Pham A D, Ahn H J. High precision reducers for industrial robots driving 4th industrial revolution: state of arts, analysis, design, performance evaluation and perspective[J]. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing-Green Technology*, 2018, 5(4): 519-533.
- [2] 张大卫,王刚,黄田,等. RV 减速机动力学建模与结构参数分析[J]. *机械工程学报*, 2001, 37(1): 69-74.
Zhang Dawei, Wang Gang, Huang Tian, et al. Dynamic formulation of rv reducer and analysis of structural parameters[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2001, 37(1): 69-74.
- [3] 郑钰馨,奚鹰,卜王辉,等. RV 减速器 5 自由度纯扭转模型非线性特性分析[J]. *浙江大学学报(工学版)*, 2018, 52(11): 2098-2109.
Zheng Yuxin, Xi Ying, Bu Wanghui, et al. Nonlinear characteristic analysis of 5-degree-of-freedom pure torsional model of RV reducer[J]. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2018, 52(11): 2098-2109.
- [4] Wang S, Tan J, Gu J J, et al. Study on torsional vibration of RV reducer based on time-varying stiffness[J]. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 2021, 9(1): 73-84.
- [5] Yang Y H, Chen C, Wang S Y. Response sensitivity to design parameters of RV reducer[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2018, 31(1): 49.
- [6] 孟聪,陈川,杨玉虎. RV 减速器模态特性分析[J]. *中国机械工程*, 2018, 29(1): 8-13.
Meng Cong, Chen Chuan, Yang Yuhu. Modal characteristic analysis of RV reducers[J]. *China Mechanical Engineering*, 2018, 29(1): 8-13.
- [7] 杨云,李朝阳,李轩. 基于能量法的摆线针轮传动啮合刚度理论研究[J]. *机械传动*, 2018, 42(9): 7-12.
Yang Yun, Li Chaoyang, Li Xuan. Theoretical study on meshing stiffness of cycloid-pin gear drive based on energy method[J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2018, 42(9): 7-12.
- [8] Xu L X, Chen B K, Li C Y. Dynamic modelling and contact analysis of bearing-cycloid-pinwheel transmission mechanisms used in joint rotate vector reducers[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2019, 137: 432-458.
- [9] 常安全,张迎辉,何卫东,等. 基于多体动力学仿真的 RV 减速器角传动误差虚拟样机的建立[J]. *机械传动*, 2018, 42(9): 168-172.
Chang Anquan, Zhang Yinghui, He Weidong, et al. Establishment of the virtual prototyping of angular transmission error of RV reducer based on multi-body dynamics simulation[J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2018, 42(9): 168-172.
- [10] 卢琦,何卫东. RV 减速器参数化建模及多体动力学仿真[J]. *机械传动*, 2021, 45(9): 87-91.
Lu Qi, He Weidong. Parametric modeling and multi-body dynamics simulation of RV reducer[J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2021, 45(9): 87-91.
- [11] Tung L C, Chan Y J. A time-variant dynamic model for compound epicyclic-cycloidal reducers[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2023, 179: 105095.
- [12] Li X, Huang J Q, Ding C C, et al. Dynamic modeling and analysis

- of an RV reducer considering tooth profile modifications and errors [J]. *Machines*, 2023, 11(6):626.
- [13] 丁国龙, 詹明儒, 赵大兴, 等. RV减速器的模态对其传动误差的影响规律研究[J]. *机械传动*, 2023, 47(1):27-34.
Ding Guolong, Zhan Mingru, Zhao Daxing, et al. Research on the influence of the RV-40E reducer modal on its transmission error [J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2023, 47(1):27-34.
- [14] 苏建新, 王东峰, 徐家科, 等. 摆线针轮啮合刚度计算与仿真分析研究[J]. *机械传动*, 2025, 49(4):1-7.
Su Jianxin, Wang Dongfeng, Xu Jiake, et al. Research on calculation and simulating analysis of cycloidal pin wheel meshing stiffness[J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2025, 49(4):1-7.
- [15] Lin K S, Chan K Y, Lee J J. Kinematic error analysis and tolerance allocation of cycloidal gear reducers[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2018, 124:73-91.
- [16] Yang Y H, Zhou G C, Chang L, et al. A modelling approach for kinematic equivalent mechanism and rotational transmission error of RV reducer [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2021, 163:104384.
- [17] 许立新, 夏晨, 杨博. 负载条件下RV减速器动态传动误差分析与试验[J]. *中国机械工程*, 2023, 34(18):2143-2152.
Xu Lixin, Xia Chen, Yang Bo. Analysis and test on dynamic transmission errors of RV reducers under load conditions [J]. *China Mechanical Engineering*, 2023, 34(18):2143-2152.
- [18] Feki N, Clerc G, Velex P. An integrated electro-mechanical model of motor-gear units—Applications to tooth fault detection by electric measurements [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2012, 29:377-390.
- [19] Jiang S, Li W, Wang Y Q, et al. Study on electromechanical coupling torsional resonance characteristics of gear system driven by PMSM: a case on shearer semi-direct drive cutting transmission system[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2021, 104(2):1205-1225.
- [20] Yao Z Y, Lin T L, Ren H L, et al. Electromechanical coupling dynamic responses of motor-gear system under different motor control methods[J]. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 2025, 44(2):1020-1038.
- [21] E Y K, Feng Z P, Chen X W, et al. Electromechanical coupling dynamic modeling and motor current analysis for fault diagnosis of rotate vector reducers[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2026, 246:113903.
- [22] Wang H, Shi Z Y, Yu B, et al. Transmission performance analysis of RV reducers influenced by profile modification and load [J]. *Applied Sciences*, 2019, 9(19):4099.

Electromechanically coupled dynamic modeling and analysis of a precision cycloidal reducer based on the small-vibration coordinate method

DU Wenwen WEI Zuoxin ZHANG Yinghui HE Weidong

(School of Mechanical Engineering, Dalian Jiaotong University, Dalian 116028, China)

Abstract: [Objective] To reveal the coupled vibration mechanism of a precision cycloidal reducer under the combined effects of error excitations and motor input, and to provide a theoretical basis for error control and coordinated optimization of electromechanical parameters. [Methods] Firstly, a standard three-crank double-cycloid precision cycloidal reducer was investigated. Based on the small-vibration coordinate method and Lagrange equations, an 11-degree-of-freedom planar bending-torsional coupled dynamic model incorporating the input shaft, crankshafts, cycloidal gears, and output carrier was established. The incremental relation among servo-motor voltage, current, and electromagnetic torque were further introduced to formulate an electromechanical coupled dynamic model. Then, time-varying meshing of the input-stage gear pair, two-dimensional elastic support of the eccentric bearings, and unilateral contact of the cycloid-pin tooth pairs were considered to investigate the effects of error excitations, load fluctuations, and motor parameters on the dynamic responses. [Results] Torsional vibration at the input side is converted into planar vibration of the cycloidal gears through the crankshafts and eccentric bearings and is subsequently transmitted to the output carrier through eccentric-support reaction forces, forming a coupled transmission path of input torsion-cycloidal-gear planar motion-output torsion. The input-stage gear error mainly affects the torsional responses of the input shaft and crankshafts, and its influence gradually attenuates toward the output side, whereas the cycloid-pin tooth error directly changes the multi-tooth contact state and instantaneous load distribution and therefore has a greater influence on the output dynamic transmission error. Compared with the baseline condition, increases in the input-stage gear error, cycloid-pin tooth error, and load fluctuation increase the peak-to-peak output dynamic transmission error by 12.37%, 30.55%, and 7.96%, respectively. Input-shaft speed fluctuations and current disturbances form a bidirectional electromechanical coupling through back electromotive force and electromagnetic torque. Increasing mechanical damping effectively suppresses input-side vibration, whereas reducing winding inductance intensifies current ripple.

Key words: Precision cycloidal reducer; Bending-torsional coupling; Electromechanical coupling; Small-vibration coordinate method; Dynamic modeling (编辑: 李立)