

基于线面共轲的柔轮空间齿面设计及误差对其齿面啮合性能影响分析

杜智强¹ 王宇欣² 张瑞亮² 王凯达²

[1. 中信机电科研设计院(山西)有限公司, 临汾 043007]

(2. 太原理工大学 齿轮研究所, 太原 030024)

摘要:【目的】现有谐波减速器柔轮空间齿面设计未能充分考虑柔轮的空间锥度变形。为此, 基于线面共轲原理, 兼顾柔轮空间变形, 由给定刚轮齿面推导无干涉、点接触、零侧隙的柔轮空间齿面, 并分析实际加工与装配过程中产生的综合误差对齿面啮合性能的影响。【方法】首先, 将综合误差划分为装配误差、波高误差及齿厚偏差三类, 构建对应误差矩阵并耦合至空间齿面模型; 其次, 由给定刚轮齿面, 推导得到无干涉、零侧隙、点接触的柔轮空间齿面; 最后, 以刚、柔轮齿面啮合时的法向侧隙为评判指标, 开展正交试验与极差分析。【结果】分析结果表明, 当存在误差时, 刚、柔轮齿面间发生几何干涉, 使法向侧隙出现负值, 且对装配误差最为敏感。其中, Y方向(齿厚方向)装配误差的法向侧隙极差远大于轴向。在谐波减速器各零件的设计生产中, 优先保证径向的加工精度有利于降低误差对刚、柔轮齿面啮合的影响。

关键词: 谐波齿轮; 空间变形; 线面啮合; 误差分析; 法向侧隙

中图分类号: TH132.43 **DOI:** 10.16578/j.issn.1004.2539.XXXX.XX.001

0 引言

谐波减速器是一种广泛应用于航空航天、机器人和医疗器械等有高精度传动需求领域的精密传动装置, 具有较高的传动精度和传动平稳性, 在兼具较小的体积质量的同时能够提供较大的传动比^[1-2]。在刚、柔轮齿面啮合过程中, 柔轮在波发生器的作用下做周期性变形, 导致谐波齿轮的齿面设计困难^[3]。现有的谐波齿面设计研究中, 主要通过柔轮齿廓运动规律近似拟合刚轮齿廓, 归根结底只是在不同截面中的二维齿廓设计^[4-5], 这样得到的齿面从啮合原理上存在着先天的不足。谐波齿轮齿面的设计需要将柔轮杯体变形的影响充分考虑在柔轮运动规律中。杨勇等^[6]提出一种基于柔轮平面弹性变形特性的运动学建模方法, 为零间隙谐波传动系统的平面共轲齿形优化设计提供了理论参考。Dong等^[7]提出一种考虑柔轮锥度变形的运动学建模方法, 强调了由于柔轮杯体的变形, 共轲齿廓需设计为空间曲面形式, 否则可能会引起齿间干涉, 但未设计具体的空间齿廓。王家序等^[8-11]在柔轮齿面设计中沿齿宽方向

考虑了不同截面的径向变形。朱飞鸿等^[12]基于柔轮筒体变形构建了谐波齿轮空间运动模型, 但在齿面设计上仍然局限于多个平面齿廓截面拟合空间齿廓。在实际生产、装配过程中, 各零件的加工误差使得实际啮合状态与理论计算存在偏差, 大量学者对此展开了分析研究。陈茜等^[13]研究了齿厚偏差对谐波齿轮传动系统的影响, 分析了其对齿面啮合特性和柔轮应力分布的作用规律, 并构建了基于多齿非线性弹性接触理论的柔轮应力响应面有限元模型。Chen等^[14]通过研究齿形的啮合特征, 提出将齿隙作为谐波减速器传动误差的评价指标, 并采用有限元仿真对设计参数进行了优化。Yang等^[15]提出一种短齿渐开线齿廓的齿厚偏差计算方法, 研究了齿厚偏差对侧隙的影响规律, 并提出一种通过调整径向变形来补偿齿隙的算法。Song等^[16]通过运动学方法建立齿轮传动的数学模型, 考虑了机床和插齿刀的圆跳动误差, 分析了两类圆跳动误差对谐波减速器精度的影响, 为误差对齿面啮合的影响提供了依据, 但分析的误差种类比较单一。彭昌琰^[17]分析了机器人精密减速器的误差特性, 重点探讨了零件加工误

收稿日期: 2026-02-02 修回日期: 2026-04-25

作者简介: 杜智强,男,1976年生,山西临猗人,高级工程师;主要研究方向为齿轮传动;332009895@qq.com。

张瑞亮(通信作者),男,1977年生,山西清徐人,博士,教授;主要研究方向为齿轮传动;rl_zhang@163.com。

引用格式: 杜智强, 王宇欣, 张瑞亮, 等. 基于线面共轲的柔轮空间齿面设计及误差对其齿面啮合性能影响分析 [J]. 机械传动, XXXX, XX (XX): 1-8.

Du Zhiqiang, Wang Yuxin, Zhang Ruiliang, et al. Design of flexspline spatial tooth surface based on curve-surface conjugacy and analysis on the influence of errors on its meshing performance [J]. Journal of Mechanical Transmission, XXXX, XX (XX): 1-8.



免费获取

差、装配误差和结构变形之间的耦合关系，基于几何误差理论构建了面向角度测量的数学模型，并开发了考虑系统结构特性的误差建模方法。侯显辉^[18]研究了机器人系统中由制造误差引发的运动学误差机制，全面评估了柔轮、刚轮及波发生器等关键组件的制造精度对运动学性能的综合影响，但缺乏对空间齿廓的影响研究，且未提出指导实际生产的举措。

本文基于线面啮合理论^[19]建立渐开线柔轮空间齿廓，并修正圆周侧隙为法向侧隙；引入误差矩阵，分析存在装配和制造等误差时，各误差对刚、柔轮齿面啮合时法向侧隙的影响；通过正交试验进行误差敏感性分析，以期找到敏感误差，为实际生产中减小误差对刚、柔轮齿面啮合的影响提供参考。

1 线面共轭柔轮空间齿面设计

在谐波传动中，柔轮杯体由波发生器的撑胀而产生空间锥度变形，其所形成的空间齿面可以基于线面共轭理论进行设计。线面共轭理论揭示了曲线与曲面在给定的运动规律下的啮合方式。构建线面共轭运动需要3个基本条件：①确定初始曲面；②选定初始曲面上的一条接触迹线；③确定运动规律。

由此，线面共轭谐波空间齿面设计步骤包括：在指定的柔轮或刚轮齿面上选定一条接触迹线，求解该接触迹线在给定运动规律下的共轭曲线；在此共轭曲线上构建刚轮或柔轮齿廓，最终形成空间齿面。基于线面共轭的空间齿面设计，包括由柔轮推导刚轮的空间齿面与由刚轮推导柔轮的空间齿面。其中，刚轮为内齿，设计成空间齿面的加工便利性不如柔轮（外齿），故本文通过渐开线刚轮直齿齿面求解渐开线柔轮空间齿面。

1.1 谐波齿轮传动空间坐标系

图1所示为针对柔轮杯体的空间变形建立的谐波传动空间坐标系。图1中， $S\{OXYZ\}$ 为与波发生器固连的动坐标系，原点 O 为波发生器的旋转中心， X 轴为长轴方向； $S_1\{O_1X_1Y_1Z_1\}$ 为构建在柔轮齿圈中性层上的动坐标系， X_1 为柔轮齿中心对称线；定坐标系 $S_2\{O_2X_2Y_2Z_2\}$ 建立在刚轮齿槽对称线上， O_2 为刚轮的旋转中心。坐标系中各参数的含义如表1所示。

$$\mathbf{M}_{ab} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \xi & -\sin \xi & 0 \\ 0 & \sin \xi & \cos \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{M}_{bc} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

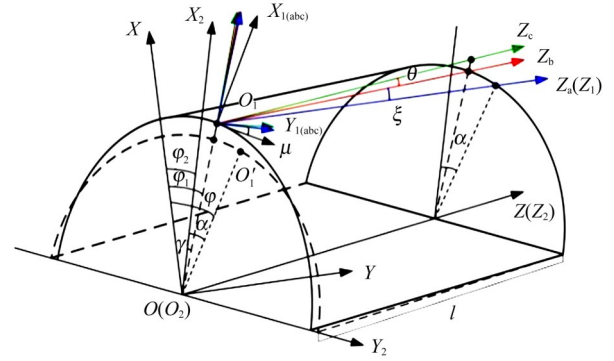


图1 谐波传动空间坐标系

Fig. 1 Spatial coordinate systems for the harmonic drive

表1 谐波传动坐标系中各参数含义

Tab. 1 Significance of each parameter in harmonic drive coordinate systems

符号	含义
φ	波发生器 X 轴与柔轮输出端的夹角
φ_1	波发生器 X 轴与柔轮变形端的夹角
φ_2	波发生器 X 轴与 X_2 轴的旋转角度
α	柔轮非变形端与 X_2 轴的夹角
γ	柔轮变形端与 X_2 轴的夹角
β	刚轮齿槽中心线与柔轮齿中心线的夹角
θ	径向位移引起的柔轮变形端的转角
ξ	切向位移引起的柔轮变形端的转角
μ	柔轮变形端的法向转角

如图2所示，在谐波传动空间坐标系中建立辅助坐标系 S_a 、 S_b 和 S_c 来表示柔轮杯体与齿圈产生的空间变形特征。其中， \mathbf{M}_{c2} 表示刚轮坐标系 S_2 到辅助坐标系 S_c 的坐标变换；柔轮母线发生锥度变形后，可描述为辅助坐标系 S_c 到 S_b 的变换，变换矩阵记为 \mathbf{M}_{bc} ；辅助坐标系 S_b 到 S_a 的变换表示柔轮母线发生的扭转变形，记为 \mathbf{M}_{ab} ；用 \mathbf{M}_{1a} 来表示辅助坐标系 S_a 到柔轮坐标系 S_1 的坐标变换。最终，刚轮坐标系可通过辅助坐标系转换至柔轮坐标系上，其变换矩阵 \mathbf{M}_{12} 为

$$\mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_{1a} \mathbf{M}_{ab} \mathbf{M}_{bc} \mathbf{M}_{c2} \quad (1)$$

其中，

$$\mathbf{M}_{1a} = \begin{bmatrix} \cos \mu & \sin \mu & 0 & 0 \\ -\sin \mu & \cos \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{M}_{c2} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & -r \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中, r 为极径 OO_1 的长度。

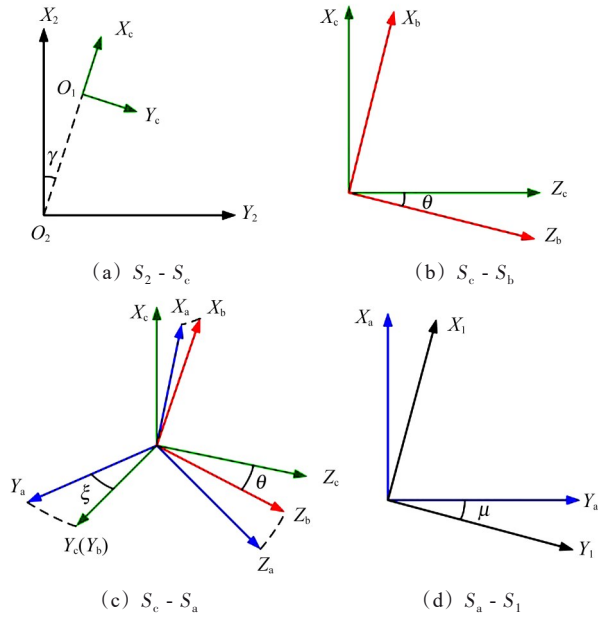


图2 谐波传动辅助坐标系

Fig. 2 Auxiliary coordinate systems for the harmonic drive

将 M_{12} 中的位移变换项去除, 可得底矢变换矩阵 W_{12} 。

为便于后续计算, 坐标系中各转角可与 φ_1 建立表达式:

$$r_0 \varphi = \int_0^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi_1}\right)^2} d\varphi_1 \quad (6)$$

$$\varphi_2 = \frac{z_1 \varphi}{z_2 r_0} \quad (7)$$

$$\mu = \arctan \frac{\dot{r}}{r} \quad (8)$$

$$\gamma = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (9)$$

$$\beta = \gamma + \mu \quad (10)$$

$$\theta = \arctan \frac{r - r_0}{l} \quad (11)$$

$$\xi = \frac{r_0(\varphi - \varphi_1)}{l} \quad (12)$$

式中, r_0 为未变形前的柔轮中性层半径; z_1 、 z_2 分别为柔轮和刚轮的齿数; l 为设计主截面至柔轮杯底的距离。

1.2 求解柔轮齿面共轭接触点

如图3所示, 在刚轮坐标系中选定渐开线刚轮直齿齿面螺旋线方向上一光滑曲线 Γ_2 作为刚轮接触迹线, 该曲线的方程可以表示为

$$\Gamma_2 = (x_{r2} \ y_{r2} \ z_{r2} \ 1)^T \quad (13)$$

其中,

$$x_{r2} = r_2 [-\sin(u_k - \theta_k) + u_k \cos \alpha_0 \cos(u_k - \theta_k + \alpha_0)]$$

$$y_{r2} = r_2 [\cos(u_k - \theta_k) + u_k \cos \alpha_0 \sin(u_k - \theta_k + \alpha_0)]$$

$$z_{r2} \in [0, b]$$

式中, r_2 为刚轮的分度圆半径; u_k 为选定的展角参数; α_0 为基准齿形角; θ_k 为刚轮齿槽所对中线角的一半, $\theta_k = s/(mz_2)$, s 为变位后刚轮齿槽分度圆的齿厚, $s = m(0.5\pi + 2x \tan \alpha_0)$, m 为齿轮模数, z_2 为刚轮齿数, x 为刚轮的变位系数; b 为齿宽。

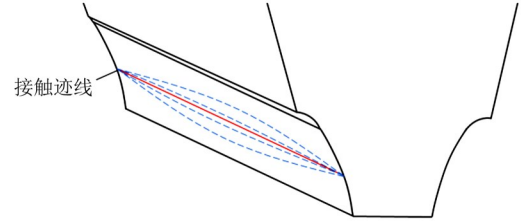


图3 刚轮接触迹线选取

Fig. 3 Selection of the contact trace of the rigid gear

基于齿轮啮合原理, 建立的啮合方程表达式为

$$\mathbf{n}_i \mathbf{v}_i^{(12)} = 0 \quad (i = 0, 1, 2) \quad (14)$$

式中, \mathbf{n}_i 和 $\mathbf{v}_i^{(12)}$ 分别为齿轮在啮合位置处的单位法向量与运动速度矢量。

在坐标系 S_1 中, \mathbf{n}_i 和 $\mathbf{v}_i^{(12)}$ 可分别表示为

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{W}_{12} \mathbf{n}_2 \quad (15)$$

$$\mathbf{v}_1^{(12)} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \frac{d\mathbf{M}_{12}}{dt} \mathbf{r}_2 \quad (16)$$

式中, \mathbf{r}_1 、 \mathbf{r}_2 分别为柔轮、刚轮的齿面向径; t 为时间。

啮合方程可以转化为

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{v}_1^{(12)} = \mathbf{n}_2^T \mathbf{W}_{12}^T \frac{d\mathbf{M}_{12}}{dt} \mathbf{r}_2 = 0 \quad (17)$$

根据数值离散方法, 选定参数 u_k 的值或范围。将刚轮接触迹线沿螺旋线方向分解为 k 个离散点; 再将每一个离散点上对应的矢径与法向量代入式(17)中, 得到该点啮合时的转角 φ_{1i} ($i = 1, 2, \dots, k$); 最后得到相应的变换矩阵 \mathbf{M}_{12} 。根据

$$\Gamma_1 = \mathbf{M}_{12} \Gamma_2 \quad (18)$$

即可得到在柔轮坐标系下与选定的刚轮接触迹线共轭的柔轮接触迹线 Γ_1 , 其由接触点 j_i ($i = 1, 2, \dots, k$) 构成。

1.3 求解柔轮空间齿面

将柔轮的渐开线截面构建在各柔轮接触点 j_i 上并不能够得到柔轮的空间齿面, 需要将接触点 j_i 还原至撑胀前的位置。每一个接触点可以用其对应的啮合时的转角 φ_1 得到还原矩阵 $\mathbf{T}_{11}(\varphi_1)$, 故柔轮撑胀前的接触迹线可以表示为

$$\Gamma_{1'} = \mathbf{T}_{11} \Gamma_1 \quad (19)$$

其中,

$$\mathbf{T}_{11} = \begin{bmatrix} \cos \mu & \sin \mu & 0 & \frac{-\Delta l v \cos \gamma}{l} \\ -\sin \mu & \cos \mu & 0 & r_0 \sin(\alpha - \gamma) \\ 0 & 0 & 1 & -l \sin \theta \tan \theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

式中, Δl 为柔轮齿截面到柔轮筒底的距离; w 为柔轮变形端的径向变形。

求得的柔轮接触迹线 $\Gamma_{1'}$ 无法进行传动, 还需要将其构建为具体的曲面形式。在柔轮接触迹线 $\Gamma_{1'}$ 上的每一接触点的法平面内构建柔轮截面齿廓曲线, 即该曲线要过接触点, 并在接触点处的主法矢方向与接触点处还原后的单位公法矢方向保持一致。在柔轮接触迹线 $\Gamma_{1'}$ 上每一个点都构建了截面齿廓曲线后, 即可得到一个连续的曲面 $\Omega_{1'}$, 其可作为柔轮的空间齿面。

在求解得到柔轮的空间齿面后, 可以通过构建撑胀矩阵 $T_{11'}$, 根据

$$\Omega_1 = T_{11'} \Omega_{1'} \quad (21)$$

其中,

$$T_{11'} = \begin{bmatrix} \cos \mu & -\sin \mu & 0 & \frac{\Delta l w \cos \gamma}{l} \\ \sin \mu & \cos \mu & 0 & -r_0 \sin(\alpha - \gamma) \\ 0 & 0 & 1 & l \sin \theta \tan \theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

得到在任意转角 φ_{1i} ($i = 1, 2, \dots, k$) 时正在参与啮合的柔轮齿面 Ω_{1i} 。

2 存在装配误差与制造误差时的啮合齿面计算

当刚轮、柔轮参与啮合时, 侧隙往往可以直观反映刚、柔轮齿面之间的接触状态。传统计算侧隙的方法多为计算两齿面上两点之间的圆周侧隙, 即指定柔轮上齿廓一点 $K_1(X_{k1}, Y_{k1})$, 以中心 O_1 到 K_1 点的距离 r_k 为半径画圆, 该圆与刚轮齿廓相交于点 $K_2(X_{k2}, Y_{k2})$, 计算 K_1 与 K_2 点之间的欧氏距离 d , 得到柔轮与刚轮啮合处的圆周侧隙 j_i 。但齿轮发生啮合时, 力与运动的传递都是发生在法向方向上的, 圆周侧隙在定义上不足以表达齿面接触, 且求得的欧氏距离永远为正, 无法判断齿面的干涉与否。故本文将两点之间的距离 d 投影至柔轮 K_1 点处的法线上, 如图4所示, 得到柔轮上该点的法向侧隙 j_n , 具体可表示为

$$\begin{cases} r_k = \sqrt{x_{k1}^2 + y_{k1}^2} \\ d = \sqrt{(x_{k2} - x_{k1})^2 + (y_{k2} - y_{k1})^2} \\ j_n = dn_r \end{cases} \quad (23)$$

式中, n_r 为柔轮齿面上任意点的单位法向量。

当考虑刚、柔轮的装配误差与制造误差时, 原本点接触的两齿面啮合状态可能会发生齿面干涉, 刚、柔轮齿面间的法向侧隙 j_n 呈现负值, 将其作为评判指标, 研究齿面接触状态变化规律。

2.1 含装配误差的啮合齿面

当谐波齿轮进行装配时, 凸轮与柔性轴承通过过盈配合组成波发生器, 波发生器与柔轮内壁之间也为过盈装配, 可以认为凸轮、柔性轴承与柔轮之

间强制同心; 刚、柔轮之间的装配误差主要来自凸轮中心与刚轮中心之间的轴向与径向偏移量。

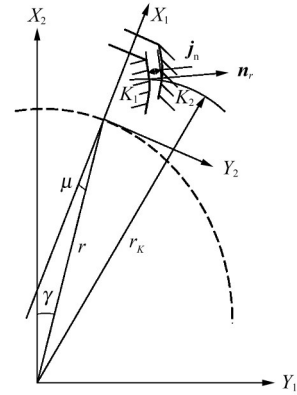


图4 法向侧隙坐标关系

Fig. 4 Coordinate relation of the normal backlash

如图5所示, 以刚轮坐标系 S_2 的中心 O_2 为基准, 波发生器装入柔轮后沿坐标系 S_2 中 X_2 、 Y_2 和 Z_2 方向偏移的柔轮齿面为 Ω_{a1} , 此时与刚轮齿面的啮合为含有装配误差的接触状态。为方便计算, 引入装配误差矩阵 T_a , 则偏移后的柔轮齿面 Ω_{a1} 可表示为

$$\Omega_{a1} = T_a \Omega_1 \quad (24)$$

其中,

$$T_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & E_x \\ 0 & 1 & 0 & E_y \\ 0 & 0 & 1 & E_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

式中, E_x 、 E_y 、 E_z 分别为凸轮中心沿坐标系 S_2 中 X_2 、 Y_2 和 Z_2 方向的偏移量。

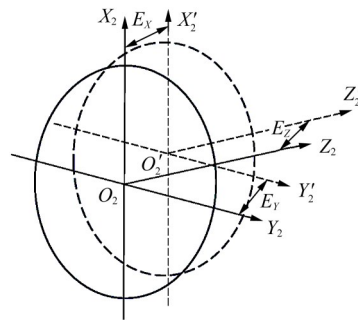


图5 含装配误差的凸轮偏移

Fig. 5 Cam offset with the assembly error

2.2 含制造误差的啮合齿面

如图6所示, 谐波齿轮的制造误差主要包含两个方面, 由凸轮加工误差 E_{es} 、柔性轴承内圈误差 E_{bi} 、外圈误差 E_{bo} 、轴承游隙 E_{bc} 以及柔轮内壁误差 E_{fi} 复合等效成的长轴处波高误差 w_E 和刚、柔轮的齿厚偏差 E_{s2} 与 E_{s1} 。波高的改变会直接改变柔轮的变形及刚、柔轮两齿面的啮合状态。设波高误差 $w_E = E_{es} + E_{bi} + E_{bo} - E_{bc} + E_{fi}$, 则有发生改变的撑胀矩阵 $T_{w11'}$, 波高改变后啮合状态下的柔轮齿面 Ω_{w1} 可表示为

$$\Omega_{w1} = T_{w11'} \Omega_1' \quad (26)$$

其中,

$$T_{w11'} = \begin{bmatrix} \cos \mu_w & -\sin \mu_w & 0 & \frac{\Delta l w_E \cos \gamma_w}{l} \\ \sin \mu_w & \cos \mu_w & 0 & -r_0 \sin(\alpha_w - \gamma_w) \\ 0 & 0 & 1 & l \sin \theta_w \tan \theta_w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

式中, μ_w 、 γ_w 、 α_w 以及 θ_w 均为波高产生变化后的转角。

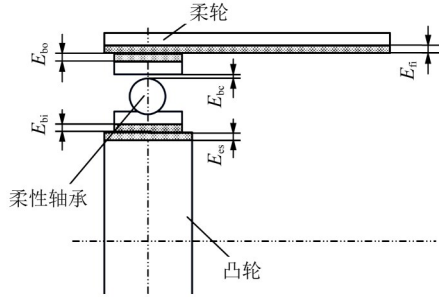


图6 波高方向各误差

Fig. 6 Various errors in the wave height direction

如图7所示, 为表征齿厚偏差对齿面的影响, 对柔轮空间齿面 Ω_1' 与刚轮直齿面 Ω_2 离散点进行法向偏移。设柔轮空间齿面 Ω_1' 上任意一离散点为 $P_i(P_{iX}, P_{iY}, P_{iZ})$, 该位置处的空间齿面单位法向量为 $\mathbf{n}_{P_i}=(n_{P_{iX}}, n_{P_{iY}}, n_{P_{iZ}})$, 将原齿面离散点 P_i 沿空间法向量 \mathbf{n}_{P_i} 方向偏移 E_{s1} , 得到含齿厚偏差的柔轮空间齿面离散点 $P'_i(P'_{iX}, P'_{iY}, P'_{iZ})$ 并张成曲面 $\Omega_{P1'}$, 其空间坐标关系满足:

$$\begin{cases} P'_{iX} = P_{iX} + E_{s1} n_{P_{iX}} \\ P'_{iY} = P_{iY} + E_{s1} n_{P_{iY}} \\ P'_{iZ} = P_{iZ} + E_{s1} n_{P_{iZ}} \end{cases} \quad (28)$$

齿厚偏差对刚轮的影响同理, 可得 $\Omega_{P2'}$ 。

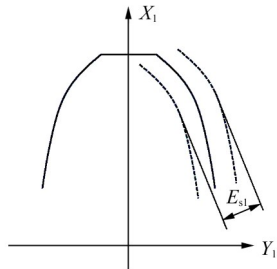


图7 齿厚偏差

Fig. 7 Tooth thickness deviation

2.3 含综合误差的啮合齿面

想要得到上述装配误差、波高误差以及齿厚偏差复合形成的综合误差对齿面啮合的影响, 需要将各种误差在齿面啮合的不同阶段考虑进去。在计算得到理论的柔轮空间齿面 Ω_1' 后, 根据各误差产生的先后顺序, 可以先求解含有齿厚偏差的柔轮空间齿面, 再考虑波高误差, 最后乘以装配误差矩阵, 得到含有综合

误差的齿面。设啮合时含有综合误差的柔轮齿面为 Ω_{E1} , 故在转角 φ_{1i} 时参与啮合的含综合误差柔轮空间齿面离散点 $P_{Ei}(P_{EiX}, P_{EiY}, P_{EiZ})$ 可以表示为

$$\begin{bmatrix} P_{EiX} \\ P_{EiY} \\ P_{EiZ} \\ 1 \end{bmatrix} = T_a T_{w11'} \times \begin{bmatrix} P'_{iX} \\ P'_{iY} \\ P'_{iZ} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

与此同时, 刚轮齿面为 Ω_{E2} 。

计算转角 φ_{1i} 时两齿面之间的法向侧隙 j_n , 可得到含有综合误差时的接触状态。

3 计算实例

以波发生器为三项余弦曲线^[20]的渐开线谐波齿轮为实例, 所选型号为NLGS-20-50-III。其主要设计参数如表2所示。

表2 渐开线设计参数
Tab. 2 Involute line design parameters

参数名称	参数值
模数 m/mm	0.431 8
柔轮齿数	100
刚轮齿数	102
波高/ mm	0.345
齿顶高系数 h^*	0.55
顶隙系数 c^*	0.2
柔轮杯口至杯底法兰圆角距离/ mm	24.5

根据NLGS-17-50-III型谐波减速器的零件图纸, 提取各误差取值范围: 凸轮中心相对于刚轮坐标系中心在 X_2 、 Y_2 方向上的偏移范围均为 $\pm 0.039 75 \text{ mm}$, 在 Z_2 方向上的偏移范围为 $\pm 0.285 \text{ mm}$; 凸轮长轴处单边加工偏差 E_{cs} 的范围为 $0 \sim 0.002 5 \text{ mm}$; 柔性轴承内圈单边加工偏差 E_{bi} 的范围为 $-0.005 \sim 0 \text{ mm}$; 柔性轴承外圈单边加工偏差 E_{bo} 的范围为 $-0.005 \sim 0 \text{ mm}$; 柔性轴承游隙 E_{bc} 的范围为 $0.005 \sim 0.01 \text{ mm}$; 柔轮内壁加工偏差 E_{in} 的范围为 $-0.002 5 \sim 0.005 \text{ mm}$ 。计算得, 复合波高误差 w_E 的范围为 $-0.022 5 \sim 0.002 5 \text{ mm}$, 刚轮齿厚偏差 E_{s2} 的范围为 $\pm 0.005 \text{ mm}$, 柔轮齿厚偏差 E_{s1} 的范围为 $\pm 0.005 \text{ mm}$ 。

3.1 柔轮空间齿面设计计算

取参数 $u_k=0.006 3$ 并代入式(13)即可定义一条刚轮接触迹线 Γ_2 , 通过式(17)计算可得与刚轮接触迹线 Γ_2 共轲的啮合转角 φ_1 的范围, 即 $[-13.329 5^\circ, 0.678^\circ]$, 对应两齿面从进入啮合到退出啮合位置, 将各转角代入式(19), 可得柔轮接触迹线 $\Gamma_{1'}$ 。

将柔轮截面齿廓沿柔轮接触迹线 $\Gamma_{1'}$ 展开, 可得到柔轮空间齿面 $\Omega_{1'}$ 。

在Matlab软件中通过式(21)计算柔轮齿面与刚

轮齿面在转角 φ_{li} 下不同位置的啮合状态。图 8 所示分别为啮出位置、中间任意位置与啮入位置的仿真模拟。可以清晰地看到, 柔轮齿面与柔轮接触迹线

随着转角 φ_{li} 的改变发生变化, 啮合接触点沿着两齿面上接触迹线运动。在啮合过程中, 柔轮齿面与刚轮齿面始终为点接触, 且齿面间不发生干涉。

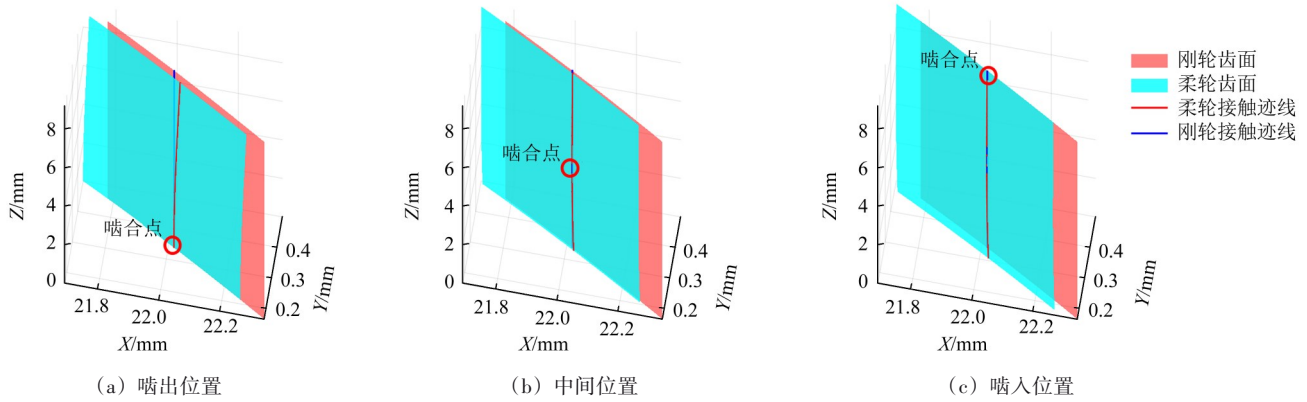


图 8 刚、柔轮啮合过程

Fig. 8 Meshing process of the rigid gear and the flexspline

3.2 误差对啮合性能的影响分析

由各方向的装配误差得到装配误差矩阵, 代入式(24)中得到含有装配误差时啮合中的刚、柔轮齿面接触状态。同理, 将波高误差与齿厚偏差代入式(26)、式(28)与式(29)中, 可分别得到含有制造误差和综合误差时啮合中的刚、柔轮齿面接触状态。

得到含有误差的齿面啮合状态后, 通过式(23)求解啮合过程中柔轮齿面上任意离散点的法向侧隙, 取最小值并判断是否大于 0, 即可得知齿面发生干涉与否及最大干涉量。

为覆盖实际生产中可能出现的正常偏差区间, 真实反映不同误差量级对刚、柔轮齿面啮合性能的影响规律, 将 3 种误差分为下限值、中间值与上限值 3 种水平进行正交试验, 结果如表 3 所示; 并通过极差分析得到存在误差时产生齿面干涉的敏感误差, 各试验结果如表 4 所示。综合误差中各因素法向侧隙极差计算结果如表 5 所示。正交试验结果表明, 装配误差的极差远大于波高误差和齿厚偏差, 说明刚、柔轮齿面间几何干涉对装配误差最为敏感, 在后续的设计、生产加工中, 应当首先考虑其影响。

表 3 综合误差因素水平表

Tab. 3 Table of factor levels for the comprehensive error

因素	实际范围/mm	水平/mm		
		1	2	3
A——装配误差	0~0.039 75(X)	0	0.019 875	0.039 75
	0~0.039 75(Y)	0	0.019 875	0.039 75
	0~0.285(Z)	0	0.142 5	0.285
B——波高误差	-0.022 5~0.002 5	-0.022 5	-0.01	0.002 5
C——齿厚偏差	-0.005~0.005	-0.005	0	0.005

表 4 综合误差敏感性分析

Tab. 4 Sensitivity analysis of the comprehensive error

因素 A	因素 B	因素 C	最小法向侧隙/mm
A1	B1	C1	0.011 919
A1	B2	C2	-0.003 118 09
A1	B3	C3	-0.006 139 95
A2	B1	C2	-0.019 631 8
A2	B2	C3	-0.028 619
A2	B3	C1	-0.023 079 8
A3	B1	C3	-0.051 492 9
A3	B2	C1	-0.045 596
A3	B3	C2	-0.055 094 8

表 5 综合误差中各因素法向侧隙极差计算结果

Tab. 5 Calculation results of the normal backlash range for each factor in the comprehensive error 单位: mm

装配误差	波高误差	齿厚偏差
0.053 694	0.008 37	0.009 32

由于装配误差的 3 个方向各不相同, 不能简单通过误差数值大小来判断各方向的装配误差对齿面啮合的影响, 故也对其各方向进行三因素三水平的正交试验, 结果如表 6 所示; 并通过极差分析得到装配误差产生齿侧间隙变化的敏感方向, 试验结果如表 7 所示。

表 6 装配误差因素水平表

Tab. 6 Table of factor levels for the assembly error

因素	实际范围/mm	水平/mm		
		1	2	3
D——X方向	0~0.039 75	0	0.019 875	0.039 75
E——Y方向	0~0.039 75	0	0.019 875	0.039 75
F——Z方向	0~0.285	0	0.142 5	0.285

装配误差中各方向法向侧隙极差计算结果如表 8 所示。结果表明, 法向侧隙对 Y 方向(齿厚方向)的偏

差最为敏感, 对 X 方向(齿高方向)的偏差次之, 对 Z 方向(齿宽方向)的偏差最不敏感。

表7 装配误差 X 、 Y 、 Z 方向敏感性分析

Tab. 7 Sensitivity analysis of the assembly error in X , Y and Z directions

因素D	因素E	因素F	最小法向侧隙/mm
D1	E1	F1	0
D1	E2	F2	-0.017 856 2
D1	E3	F3	-0.035 783 3
D2	E1	F2	-0.009 422 15
D2	E2	F3	-0.026 901 1
D2	E3	F1	-0.044 467 6
D3	E1	F3	-0.018 945 2
D3	E2	F1	-0.036 424 6
D3	E3	F2	-0.053 904 2

表8 装配误差中各方向法向侧隙极差计算结果

Tab. 8 Calculation results of the normal backlash range in each direction of the assembly error 单位: mm

X 方向	Y 方向	Z 方向
0.018 54	0.035 26	0.000 25

由上述分析结果可知, 存在误差时, 刚、柔轮齿面啮合时的最小法向侧隙值出现了负值, 表明齿面间发生了干涉。以刚、柔轮啮合时的干涉情况为评判指标, 装配误差中 Y 方向(齿厚方向)的偏差对齿面啮合影响最大。这表明, 想要降低误差对齿面啮合的影响, 需要优先保证造成装配误差的各零部件周向加工精度。由试验结果也可知, 齿面啮合对装配误差中 Z 方向(齿宽方向)的偏差极不敏感。这表明, 在谐波减速器结构中, 各零件的轴向尺寸误差与由密封圈变形引起的轴向偏移对齿面啮合的影响较小。

4 结论

1) 基于线面啮合理论, 通过给定刚轮及其接触迹线, 推导建立了柔轮空间齿面; 并通过数值仿真分析验证了, 基于线面共轲推导计算得到的刚、柔轮齿面在啮合时保持点接触, 且不会发生干涉。

2) 通过正交试验结果并计算极差得出, 最小法向侧隙对装配误差中的 Y 方向(齿厚方向)偏移最敏感, 对 Z 方向(齿宽方向)偏移最不敏感。故在谐波减速器各零件的设计生产中, 优先保证周向的加工精度有利于降低误差对刚、柔轮齿面啮合的影响。

3) 装配误差主要来自各零件的加工误差, 优先保证各个零件的周向精度可以有效降低误差对齿面啮合的影响, 各零件的轴向尺寸误差与由密封圈变形引起的轴向偏移对齿面啮合的影响较小。

参 考 文 献

- [1] Wang S Y, Chen H W, Zhang X Y, et al. Investigation on steady-state temperature field by a novel laminated tooth for multi-tooth in harmonic gear drive[J]. Case Studies in Thermal Engineering, 2025, 65: 105649.
- [2] 王瑞锋, 张立勇, 张建伟, 等. 谐波齿轮传动概述[J]. 机械传动, 2019, 43(1): 171-176.
Wang Ruifeng, Zhang Liyong, Zhang Jianwei, et al. Summary of harmonic gear drive [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2019, 43(1): 171-176.
- [3] 向珍琳, 李霆, 杨林, 等. 谐波减速器研究现状及问题研究[J]. 机械传动, 2020, 44(7): 151-162.
Xiang Zhenlin, Li Ting, Yang Lin, et al. Study on status and problem research of harmonic gear drive [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2020, 44(7): 151-162.
- [4] 王爽, 邱皓, 姜歌东. 考虑柔轮空间变形的谐波齿轮传动齿形设计方法[J]. 机械传动, 2021, 45(10): 66-71.
Wang Shuang, Qiu Hao, Jiang Gedong. Design method for tooth profile of harmonic drive considering the spatial deformation of flexspline [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2021, 45(10): 66-71.
- [5] 刘佳鑫, 李栋, 王淑妍, 等. 基于数值包络法的谐波齿轮传动共轲齿廓设计方法[J]. 机械传动, 2024, 48(9): 68-75.
Liu Jiaxin, Li Dong, Wang Shuyan, et al. Design method of conjugate tooth profile of the harmonic gear drive based on the numerical envelope method [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2024, 48(9): 68-75.
- [6] 杨勇, 王家序, 周青华, 等. 椭圆凸轮波发生器零侧隙谐波齿轮传动共轲齿廓精确求解[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2017, 48(12): 3231-3238.
Yang Yong, Wang Jiayu, Zhou Qinghua, et al. Exact solution for conjugate profiles of zero backlash harmonic drives with elliptical cam wave generators [J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2017, 48(12): 3231-3238.
- [7] Dong H M, Wang D L, Ting K L. Kinematic effect of the compliant cup in harmonic drives [J]. Journal of Mechanical Design, 2011, 133(5): 051004.
- [8] 王家序, 袁攀, 谭春林, 等. 基于齿条近似法的谐波传动空间齿廓设计方法[J]. 吉林大学学报(工学版), 2017, 47(4): 1121-1129.
Wang Jiayu, Yuan Pan, Tan Chunlin, et al. Spatial tooth profile design of harmonic drive by rack approximation method [J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2017, 47(4): 1121-1129.
- [9] 袁攀. 基于齿条近似法的谐波齿轮传动空间齿廓设计与分析[D]. 重庆: 重庆大学, 2017: 43-61.
Yuan Pan. Spatial profile design and analysis of harmonic drive by rack approximation theory [D]. Chongqing: Chongqing University, 2017: 43-61.
- [10] 周祥祥. 三维双圆弧齿廓谐波传动的齿形设计与分析[D]. 重庆: 重庆大学, 2016: 51-69.
Zhou Xiangxiang. Three dimensional profile design and analysis of harmonic drive with double-circular-arc common-tangent tooth profile [D]. Chongqing: Chongqing University, 2016: 51-69.

- [11] 范政武,刘宇杰,张瑞亮. 柔轮齿廓参数优化和啮合特性分析软件开发[J]. 机械传动,2025,49(8):164-169.
Fan Zhengwu, Liu Yujie, Zhang Ruiliang. Software development of tooth profile parameter optimization and meshing characteristic analysis of flexspline [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2025, 49(8):164-169.
- [12] 朱飞鸿,杜雪松,宋朝省,等. 考虑柔轮杯体变形的谐波传动空间共轭齿廓设计与分析[J]. 中南大学学报(自然科学版),2020,51(9):2471-2479.
Zhu Feihong, Du Xuesong, Song Chaosheng, et al. Design and analysis of space conjugate tooth profile of harmonic drive considering deformation of flexspline cup [J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2020, 51(9):2471-2479.
- [13] 陈茜,李俊阳,王家序,等. 制造误差对谐波齿轮应力的影响规律[J]. 浙江大学学报(工学版),2019,53(12):2289-2297.
Chen Qian, Li Junyang, Wang Jiaxu, et al. Influence law of manufacturing error on harmonic gear stress [J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2019, 53(12):2289-2297.
- [14] Chen X X, Liu Y S, Xing J Z, et al. The parametric design of double-circular-arc tooth profile and its influence on the functional backlash of harmonic drive [J]. Mechanism and Machine Theory, 2014, 73:1-24.
- [15] Yang C B, Ma H L, Zhang T, et al. Calculation of tooth thickness errors and its adjustment on meshing backlash of harmonic drive [J]. International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, 2023, 24(2):289-301.
- [16] Song C S, Wang S P, Li X Z, et al. Influences of circular runout errors and processing parameters for slotting on the accuracy of harmonic reducer [J]. Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing, 2022, 16(1):JAMDSM0003.
- [17] 彭昌琰. 机器人精密减速器传动性能测试技术及系统研究 [D]. 重庆:重庆大学,2020:15-112.
Peng Changyan. Research on transmission performances testing technology and system of precision reducers used in robot [D]. Chongqing:Chongqing University, 2020:15-112.
- [18] 侯昱辉. 机器人关节传动误差分析及补偿机制研究 [D]. 济南:山东建筑大学,2022:8-53.
Hou Yuhui. Research on transmission error analysis and compensation mechanism of robot joints [D]. Jinan: Shandong Jianzhu University, 2022:8-53.
- [19] 彭帅,陈兵奎. 线面对构齿轮啮合原理 [J]. 中国机械工程, 2020, 31(8):937-943.
Peng Shuai, Chen Bingkui. Principle of geometric elements constructed tooth pairs with curve-surface mesh [J]. China Mechanical Engineering, 2020, 31(8):937-943.
- [20] 王玮,张瑞亮,徐怀哲,等. 谐波减速器三项余弦凸轮波发生器的设计与分析 [J]. 机械传动,2026,50(1):119-125.
Wang Wei, Zhang Ruiliang, Xu Huaizhe, et al. Design and analysis of three-term cosine cam wave generators for harmonic reducers [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2026, 50(1):119-125.

Design of flexspline spatial tooth surface based on curve-surface conjugacy and analysis on the influence of errors on its meshing performance

Du Zhiqiang¹ Wang Yuxin² Zhang Ruiliang² Wang Kaida²

[1. CITIC Machinery Research & Design Institute (Shanxi) Co., Ltd., Linfen 043007, China]

[2. Gear Research Institute, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China]

Abstract: [Objective] Existing spatial tooth surface designs for the flexspline of harmonic reducers fail to fully consider its spatial conical deformation. Therefore, based on the curve-surface conjugacy theory and taking the spatial deformation of the flexspline into account, the non-interference, point-contact and zero-backlash spatial tooth surface of the flexspline was derived from the given circular spline tooth surface, and the influence of comprehensive errors from actual machining and assembly on tooth surface meshing performance was analyzed. [Methods] Firstly, the comprehensive errors were classified into three types: assembly error, wave height error and tooth thickness deviation, and corresponding error matrices were constructed and coupled into the spatial tooth surface model. Secondly, the non-interference, zero-backlash and point-contact spatial tooth surface of the flexspline was derived from the given circular spline tooth surface. Finally, orthogonal tests and range analysis were carried out with the normal backlash in meshing between circular spline and flexspline tooth surfaces as the evaluation index. [Results] The analysis results show that in the presence of errors, geometric interference occurs between the rigid and flexspline tooth surfaces, leading to negative values of normal backlash, and the meshing system is the most sensitive to assembly errors. Among all assembly errors, the range of normal backlash caused by the Y -direction (tooth thickness direction) assembly error is much larger than that caused by the axial assembly error. Therefore, in the design and production of harmonic reducer components, prioritizing the radial machining accuracy is conducive to reducing the adverse effect of errors on the meshing performance of rigid and flexspline tooth surfaces.

Key words: Harmonic gear; Spatial deformation; Curve-surface conjugate meshing; Error analysis; Normal backlash

(编辑: 贾文倩)