

航空花键-转子系统错位花键动态特性分析

仲温鑫 靳广虎 朱如鹏

(南京航空航天大学 机电学院 直升机动力学全国重点实验室, 南京 210016)

摘要:【目的】花键是航空动力传输系统的重要联接件,受制造误差、装配误差或工作载荷的影响,常会发生平行错位、角度错位和综合错位等情况,影响花键的啮合长度和各齿承载能力。为提高传动系统的平稳性,降低航空花键的故障率,有必要开展错位花键的啮合刚度特性分析。【方法】建立航空花键-转子系统动力学模型,求解花键时变啮合长度,将切片法和石川法相结合,获得不同错位情况下的花键单齿啮合刚度并求解系统动力学响应。【结果】结果表明,增大静态平行错位量和静态角度错位量,花键单齿啮合刚度的变化幅度及转子系统的动力学响应增大;静态平行错位量不变,改变静态角度错位量,花键啮合刚度和转子系统的动力学响应变化不明显;静态角度错位量不变,增大静态平行错位量,花键啮合刚度和转子系统动力学响应变化明显。

关键词:航空花键;转子动力学;啮合刚度;Newmark-Beta法

中图分类号:TH132 **DOI:** 10.16578/j.issn.1004.2539.XXXX.XX.001

0 引言

航空花键是直升机动力传输系统中的关键联接件之一^[1]。在动力传输过程中,受制造误差、装配误差或工作载荷的影响,花键副常发生错位现象,导致花键副的啮合刚度产生变化。啮合刚度是衡量花键副抵抗周期性弹性变形能力的关键参数,直接影响传动系统的振动特性、噪声和寿命^[2-3]。此外,由花键错位因素引起的传动系统动力学特性也会反作用于花键副的啮合刚度,它们相互之间具有耦合作用。因此,研究错位花键的啮合刚度及其与传动系统动态响应间的耦合作用,对优化航空花键-转子系统的设计、提高系统稳定性和可靠性具有重要意义^[4]。

近年来,随着航空发动机的功率和输出转速不

断增大,由花键联接失效引起的故障问题时有发生。鉴于花键联接对航空传动系统可靠性的重要影响,有关错位花键的啮合刚度研究备受关注。MARMOL等^[5]假设花键沿轴线的刚度分布相同,并用等效黏性阻尼系数表示花键摩擦阻尼,基于花键齿形的变形推导出花键耦合刚度。ROGER等^[6]采用交互式的方法,通过计算机程序模拟和实验测量获

得了花键联轴器的角刚度和等效黏性阻尼系数。NA-TARAJ等^[7]考虑库伦摩擦力,研究分析了采用花键联接的刚性转子系统的非线性动力学特性。MIAO等^[8]建立花键-转子系统的动力学模型,利用改进的势能法获得了不同错位情况下的花键各齿啮合刚度,并研究了静态错位和动态错位对花键啮合刚度的影响。霍启新^[9]推导出花键啮合点位置变化的计算公式,将花键沿齿根至受载处均匀化分成 n 个相同受载微段,考虑每一个微段的截面惯性矩,基于计算的花键单齿弯曲柔度和剪切柔度获得了花键单齿的切向刚度。LIU等^[10]考虑内外花键之间的非线性接触,采用有限元法计算了航空发动机转子系统中花键的接触刚度。HU等^[11]假设花键副每对齿的接触载荷相同,并将整个花键副视为并联弹簧,采用有限元法获得了转子系统的非线性动力学特性。ZHU等^[12]考虑花键齿的变形和齿面摩擦因数的影响,得到了花键副的耦合刚度矩阵和阻尼矩阵。

研究文献表明,航空花键-转子系统的动力学特性与花键的啮合刚度相关;此外,传动系统中的花键副动态特性也影响花键的实际啮合长度。因此,啮合刚度和动力学特性相互之间具有耦合作用,但

收稿日期:XXXX-XX-XX 修回日期:XXXX-XX-XX

基金项目:国家自然科学基金面上项目(51975273);直升机传动技术重点实验室基金项目(HTL-A-22G13)

作者简介:仲温鑫,男,2001年生,吉林白城人,硕士研究生;主要研究方向为花键转子系统动力学特性分析;E-mail:zwx0731@nuaa.edu.cn。

靳广虎(通信作者),男,1971年生,安徽寿县人,教授,博士生导师;主要研究方向为直升机传动技术;E-mail:mecghjin@nuaa.edu.cn。

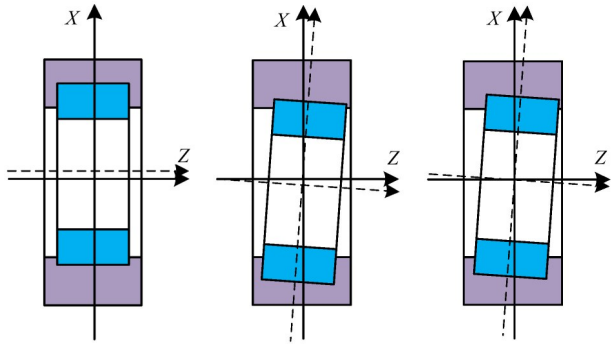
引用格式:仲温鑫,靳广虎,朱如鹏.航空花键-转子系统错位花键动态特性分析[J].机械传动,XXXX,XX(XX):1-13.

ZHONG Wenxin, JIN Guanghu, ZHU Rupeng. Analysis of dynamic characteristics of misaligned splines in aviation spline-rotor system[J]. Journal of Mechanical Transmission, XXXX, XX(XX): 1-13.

目前有关这部分的研究文献还较少。因此,本文基于理论分析和数值模拟,将石川法和切片法相结合,研究错位花键的啮合刚度计算方法,并通过构建的航空花键-转子系统的动力学模型计算了传动系统的动态特性,分析了动态特性对花键啮合刚度的影响,以期对航空花键-转子系统的正向设计与故障诊断提供理论支持。

1 花键副的啮合刚度及阻尼

由制造、装配误差或工作载荷引起的花键副错位情况主要包括以下3种:平行错位情况、角度错位情况和综合错位情况,如图1所示。



(a) 平行错位示意图 (b) 角度错位示意图 (c) 综合错位示意图

图1 花键副错位示意图

Fig.1 Spline misalignment situation

图1中, Z 轴为花键副的轴线; X 轴为花键副的径向方向。

1.1 花键单齿啮合刚度

为获得图1所示的错位花键啮合刚度,基于直齿轮啮合刚度的计算方法,融合切片法和石川法,计算错位花键的单齿啮合刚度。

如图2所示,首先,沿齿宽 B 方向将花键齿均匀切割成 n 个每片厚度为 S 的花键齿片,并将花键齿片等效为梯形悬臂梁,利用石川法计算每个花键齿片的啮合刚度;然后,将 n 个花键齿片的刚度进行叠加,从而得到花键的单齿啮合刚度^[13]。图2中, S_f 表示齿根厚; S_k 表示齿顶厚; H_r 表示花键啮合点至齿根的距离; H_x 表示载荷作用点至啮合端点的径向距离; H 表示花键齿顶和齿根间的径向距离; H_i 表示腰长延长线交点至齿根的径向距离; η 表示法向载荷 F_N 与速度间的夹角; L_{ij} 表示花键啮合线长度。

基于图2所示的花键单齿切片等效梯形截面结构可知,内外花键齿的变形 $\delta_i(i=1, 2)$ 由矩形截面弯曲变形 δ_b 、梯形截面变形 δ_r 、剪切变形 δ_s 和倾斜变形 δ_c 组成。则 δ_i 可表示为

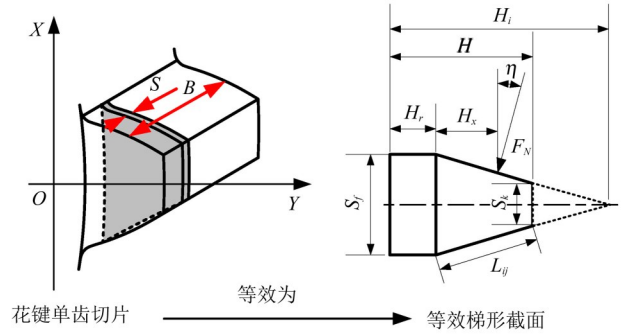


图2 花键单齿切片等效梯形截面示意图

Fig.2 Schematic diagram of the equivalent trapezoidal section of a spline single-tooth slice

$$\delta_i = \delta_b + \delta_r + \delta_s + \delta_c \quad (1)$$

矩形截面弯曲变形 δ_b 的计算公式为

$$\delta_b = \frac{12F_N \cos^2 \eta}{E(B/n)S_f^3} \left[H_x H_r (H_x - H_r) + \frac{H_r^3}{3} \right] \quad (2)$$

式中, E 为弹性模量。

梯形截面变形 δ_r 的计算公式为

$$\delta_r = \frac{6F_N \cos^2 \eta}{E(B/n)S_f^3} (H_i - H_r)^3 \left[\frac{H_i - H_x}{H_i - H_r} \left(4 - \frac{H_i - H_x}{H_i - H_r} \right) - 2 \ln \frac{H_i - H_x}{H_i - H_r} \right] \quad (3)$$

式中, $H_i = \frac{HS_f - H_r S_k}{S_f - S_k}$ 。

剪切变形 δ_s 的计算公式为

$$\delta_s = \frac{2(1 + \nu)F_N \cos^2 \eta}{E(B/n)S_f} \left[H_r + (H_i - H_r) \ln \frac{H_i - H_r}{H_i - H_x} \right] \quad (4)$$

式中, ν 为泊松比。

倾斜变形 δ_c 的计算公式为

$$\delta_c = \frac{24F_N H_x^2 \cos^2 \eta}{\pi E(B/n)S_f^2} \quad (5)$$

根据花键齿的几何形状可知

$$H = \sqrt{r_a^2 - \left(\frac{S_k}{2}\right)^2} - \sqrt{r_f^2 - \left(\frac{S_f}{2}\right)^2} \quad (6)$$

$$H_x = r_x \cos(\alpha_x - \eta) - \sqrt{r_f^2 - \left(\frac{S_f}{2}\right)^2} \quad (7)$$

式中, r_a 为齿顶圆半径; r_f 为齿根圆半径; r_x 为载荷作用点到花键齿中心点的距离; α_x 为啮合角。

如图3所示,外花键的齿廓存在两种类型,即:(1)基圆半径 r_b 小于等于齿根圆半径 r_f ;(2)基圆半径 r_b 大于齿根圆半径 r_f 。需要对两种类型别进行讨论。

当基圆半径 r_b 小于等于齿根圆半径 r_f ,即 $z \geq 2(1 - x_0)/(1 - \cos \eta)$ 时,有

$$S_f = 2r_f \sin \left(\frac{\pi + 4x_0 \tan \alpha}{2z} + \text{inv } \alpha - \text{inv } \alpha_f \right) \quad (8)$$

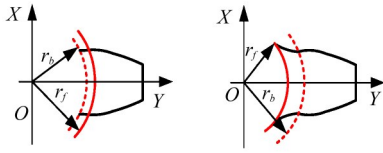


图3 外花键齿廓类型示意图

Fig. 3 Schematic diagram of the type of tooth profile of the external spline

$$\alpha_f = \arccos \frac{r_b}{r_f} \quad (9)$$

$$H_r = \sqrt{r_f^2 - \left(\frac{S_f}{2}\right)^2} - \sqrt{r_b^2 - \left(\frac{S_f}{2}\right)^2} \quad (10)$$

当基圆半径 r_b 大于齿根圆半径 r_f , 即 $z < 2(1 - x_0)/(1 - \cos \eta)$ 时, 有

$$S_f = 2r_b \sin\left(\frac{\pi + 4x_0 \tan \alpha}{2z} + \text{inv } \alpha\right) \quad (11)$$

$$H_r = \sqrt{r_b^2 - \left(\frac{S_f}{2}\right)^2} - \sqrt{r_f^2 - \left(\frac{S_f}{2}\right)^2} \quad (12)$$

式中, z 为花键齿数; x_0 为变位系数; r_f 为有效齿根圆半径; α 为压力角。

由于齿数关系, 主要针对第二种情况进行研究与讨论。为获得花键副的啮合刚度, 构建了花键连接副的坐标系, 如图4所示。图4中, $O_1-X_1Y_1Z_1$ 为外花键对中情况坐标系; $O_1-X_2Y_2Z_2$ 为外花键平行错位坐标系; $O_1-X_3Y_3Z_3$ 为外花键角度错位坐标系; $O_1-X_3Y_3Z_3$ 为外花键综合错位坐标系^[14]。

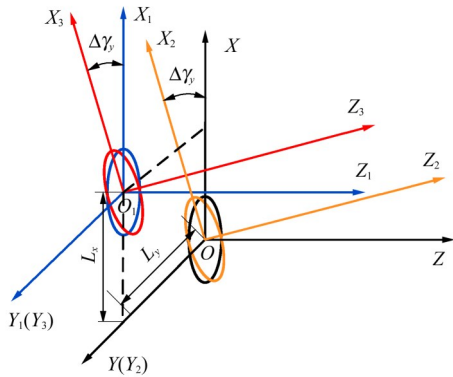


图4 花键错位坐标系示意图

Fig. 4 Schematic diagram of the coordinate system of the three misalignment cases

花键啮合有别于齿轮啮合, 在计算花键啮合刚度时, 将等效梯形截面腰长近似为花键副的接触长度 L 。假定 y 方向上的第一个齿为 1 号齿, 沿逆时针齿号依次增大, 可获得具体齿号表述, 如图5所示。

花键错位使得不同花键齿片的接触长度发生变化。第 j 个花键齿的第 i 个花键齿片的花键接触长度 L_{ij} 可以表示为^[15]

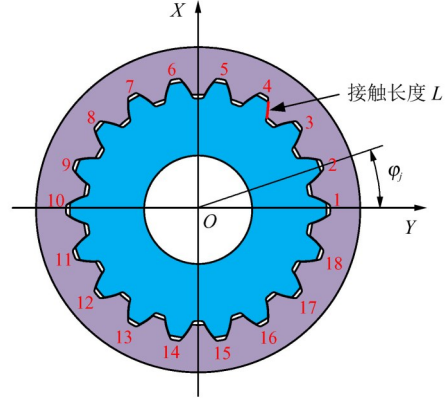


图5 花键啮合示意图

Fig. 5 Schematic diagram of spline meshing

$$\begin{aligned} L_{ij} = & L_0 - L_x \cos \varphi_j + L_y \sin \varphi_j - \Delta u_x \cos(\varphi_j + \Omega t) - \\ & \Delta u_y \sin(\varphi_j + \Omega t) - \left(iS - \frac{B}{2}\right) \Delta \theta_y \cos(\varphi_j + \Omega t) - \\ & \left(iS - \frac{B}{2}\right) \Delta \theta_x \sin(\varphi_j + \Omega t) - \left(iS - \frac{B}{2}\right) \Delta \gamma_y \cos \varphi_j \end{aligned} \quad (13)$$

式中, L_0 为无错位情况下花键的啮合长度, $L_0 = \pi m/2$; L_x 和 L_y 分别为外花键沿 x 方向和 y 方向的静态平行错位量; $\Delta \theta_x$ 和 $\Delta \theta_y$ 分别为外花键绕 x 方向和 y 方向的动态旋转角度; Δu_x 和 Δu_y 分别为外花键沿 x 方向和 y 方向的动态平行位移; $\Delta \gamma_y$ 为外花键静态角度错位量; S 为单个切片的厚度, $S=B/n$; φ_j 为第 j 个花键齿与 y 轴的角度, $\varphi_j = 2\pi(j-1)/z$; Ω 为传动系统的转速。

根据上述理论与方法, 第 j 齿的第 i 片花键齿片的啮合刚度 K_{ij} 可以表示为

$$K_{ij} = \frac{F_{ij}}{\delta_1 + \delta_2 + \delta_c} \quad (14)$$

式中, F_{ij} 为第 j 花键齿的第 i 花键齿片所受法向载荷; δ_1 和 δ_2 分别为外花键和内花键齿片沿啮合线方向的变形; δ_c 为花键齿的接触变形, $\delta_c = 4(1 - \nu^2)F_N/[\pi E(B/n)]$ 。

第 j 花键齿的啮合刚度可以表示为

$$K_j = \sum_{i=1}^n K_{ij} \quad (15)$$

1.2 花键单元整体刚度及阻尼

花键单元的整体刚度由花键副啮合齿对的啮合刚度叠加而得。综合考虑传动系统的振动和花键错位的影响, 花键单元的整体啮合刚度呈时变状态。花键单元沿 x 方向和 y 方向的整体横向刚度 k_{xx} 和 k_{yy} 可以表示为

$$\begin{cases} k_{sx} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^z K_{ij} \sin^2(\varphi_j - \alpha) \\ k_{sy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^z K_{ij} \cos^2(\varphi_j - \alpha) \end{cases} \quad (16)$$

花键单元沿 x 方向和 y 方向的整体角向刚度 $k_{s\theta x}$ 和 $k_{s\theta y}$ 可以表示为

$$\begin{cases} k_{s\theta x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^z \frac{K_{ij} S}{12} \cos^2(\varphi_j - \alpha) \\ k_{s\theta y} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^z \frac{K_{ij} S}{12} \sin^2(\varphi_j - \alpha) \end{cases} \quad (17)$$

花键单元的阻尼主要由花键齿间的摩擦产生。假设花键各对齿的啮合情况相同且不变,且在1个完整运动周期内的滑动摩擦耗能等于黏性阻尼耗能^[16],则花键单元的整体横向阻尼和角向阻尼可以表示为

$$\begin{cases} c_1 = \frac{2f_s T}{\pi r_p \omega A_1 \cos^2 \alpha} \\ c_2 = \frac{f_s T B}{2\pi r_p \omega A_2 \cos^2 \alpha} \end{cases} \quad (18)$$

式中, f_s 为花键齿面滑动摩擦因数; T 为传递转矩; r_p 为节圆半径; A_1 为内外花键相对横向振动的位移幅值; A_2 为内外花键的相对转动角度幅值。

1.3 错位花键啮合刚度分析

为获得花键错位对动态啮合刚度的影响规律,根据构建的航空花键-转子系统动力学方程,通过求解花键节点的动力学响应,并将仿真结果反馈至式(13),通过计算的内外花键时变啮合长度,获得了不同错位情况对花键动态啮合刚度的影响,并给出了0.5~1 s区间内花键各齿啮合刚度变化的三维图,以及1 s时刻的花键各齿啮合刚度变化图。

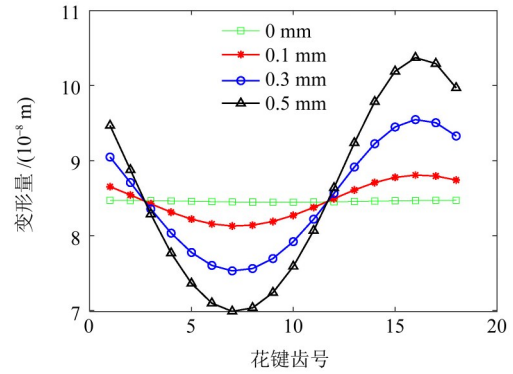
1.3.1 平行错位影响的啮合刚度分析

为获得平行错位量影响的花键副啮合刚度变化规律,假定静态角度错位量为0,选取切片数目为30,探讨了3种静态平行错位量(0.1、0.3、0.5 mm)对花键啮合刚度的影响。

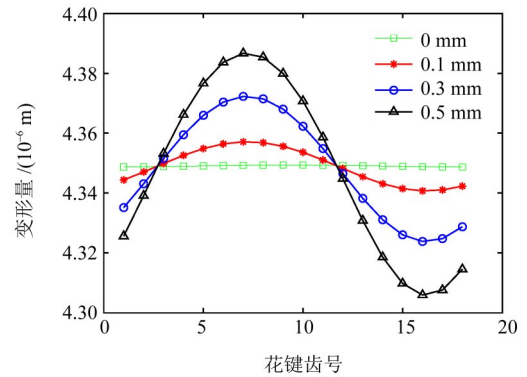
平行错位对花键各齿变形的影响如图6所示。由图6可知,对中情况下,花键各齿的变形量相同,图像呈直线;随着静态平行错位量的增大,花键各齿变形量的变化幅度也随之增大,且花键各齿变形量的变化规律基本一致。

平行错位对花键各齿啮合刚度的影响如图7所示。由图7(a)可知,以对中情况为基准,随着平行错位量的增大,花键各齿啮合刚度的变化幅度也逐渐增大。其中,7号花键齿的啮合刚度最大,平行错位量为0.5 mm时,啮合刚度为 1.71×10^8 MPa; 16号花键齿的啮合刚度最小,平行错位量为0.5 mm时,

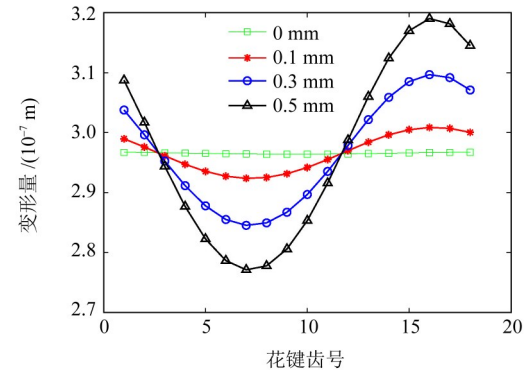
啮合刚度为 1.67×10^8 MPa。



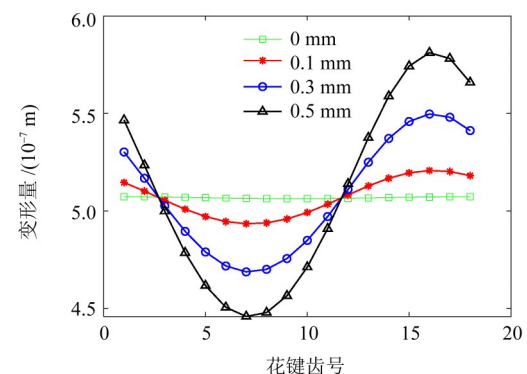
(a) 矩形截面弯曲变形 δ_B



(b) 等效梯形截面变形 δ_T



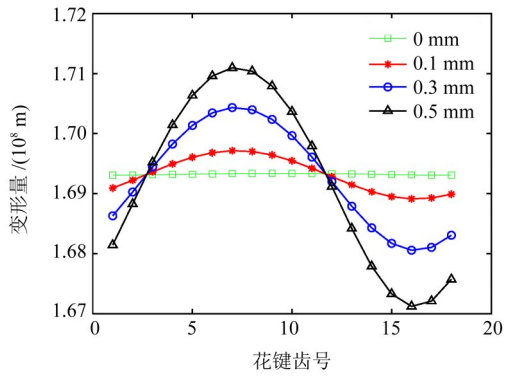
(c) 剪切变形 δ_S



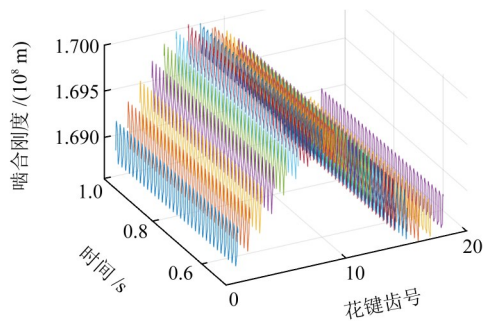
(d) 倾斜变形 δ_G

图6 平行错位对花键各齿变形的影响

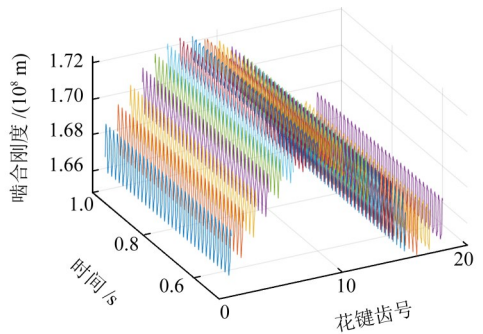
Fig. 6 Effect of parallel misalignment on the deformation of spline teeth



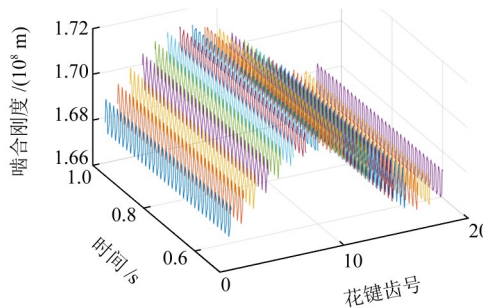
(a) 平行错位对花键各齿啮合刚度的影响



(b) 0.1 mm 静态平行错位量对花键各齿啮合刚度的影响



(c) 0.3 mm 静态平行错位量对花键各齿啮合刚度的影响



(d) 0.5 mm 静态平行错位量对花键各齿啮合刚度的影响

图7 平行错位量对花键各齿啮合刚度的影响规律

Fig. 7 The influence of parallel dislocation on the meshing stiffness of each tooth of the spline

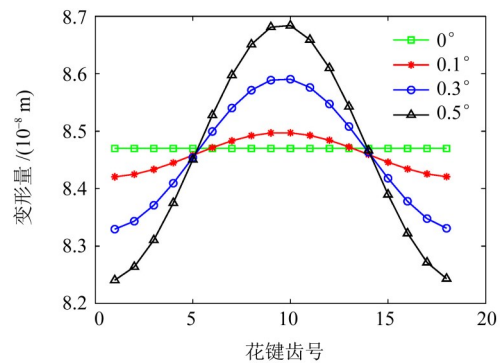
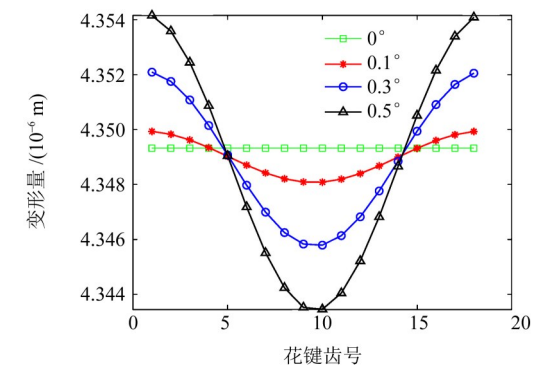
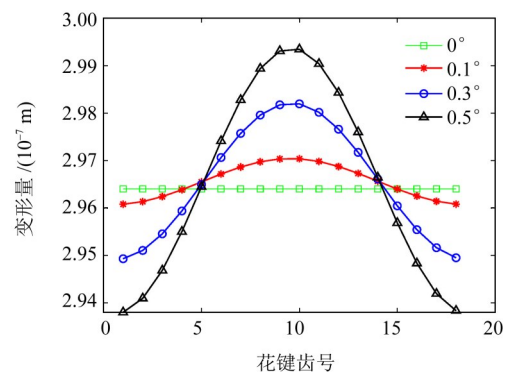
啮合刚度的三维图可以更直观地反映错位对花键各齿啮合刚度的变化。因此, 本文给出了错位量影响的啮合刚度三维图。图7(b)、图7(c)和图7(d)即为平行错位量对花键各齿啮合刚度影响的三维图。由图可见, 花键各齿啮合刚度呈波动状态, 且随着

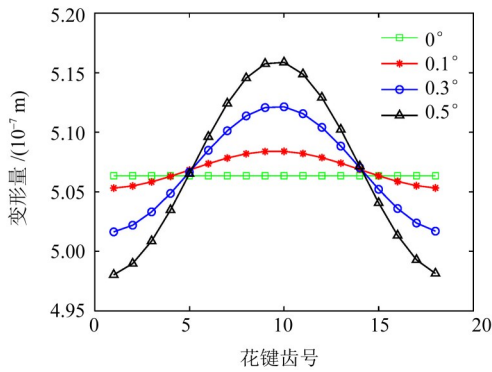
平行错位量的增大, 花键单齿啮合刚度的波动范围也逐渐增大。

1.3.2 角度错位影响的啮合刚度分析

为获得角度错位量影响的花键副啮合刚度变化规律, 假定静态平行错位量为0, 选取切片数目为30, 重点探讨3种静态角度错位量(0.1° , 0.3° , 0.5°)对花键啮合刚度的影响。

角度错位对花键各齿变形的影响如图8所示。由图8可见, 随着角度错位量从 0.1° 增大到 0.5° , 花键各齿变形的变化幅度逐渐增大。根据平行错位的分析可知, 两种错位情况下的同一花键齿的受力大小并不相同。因此, 花键各齿变形量的变化特性和大小发生了变化。

(a) 矩形截面弯曲变形 δ_B (b) 等效梯形截面变形 δ_T (c) 剪切变形 δ_S



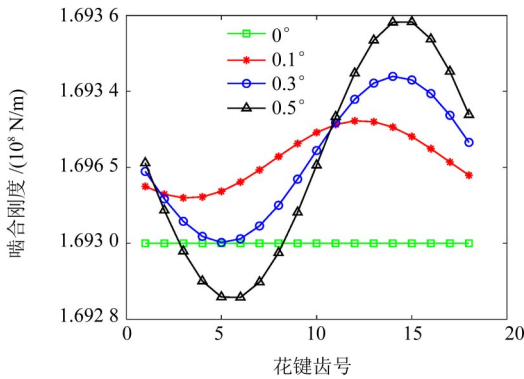
(d) 基体倾斜变形

图8 角度错位对花键各齿变形的影响

Fig. 8 Influence of angular misalignment on the deformation of spline teeth

角度错位对花键各齿啮合刚度的影响如图9所示。由图9(a)可知,随着角度错位量的增大,花键的啮合刚度和啮合刚度的变化幅度也增大。当角度错位量为 0.1° 时,12号花键齿的啮合刚度最大,3号花键齿的啮合刚度最小;当角度错位量为 0.3° 时,14号花键齿的啮合刚度最大,5号花键齿的啮合刚度最小;当角度错位量为 0.5° 时,15号花键齿的啮合刚度最大,6号花键齿的啮合刚度最小。

图9(b)、图9(c)和图9(d)即为角度错位对花键各齿啮合刚度影响的三维图。从三维图中可以明显看出,随着静态平行错位量的增大,花键单齿啮合刚度的波动范围也在逐渐增大。



(a) 角度错位对花键各齿啮合刚度的影响

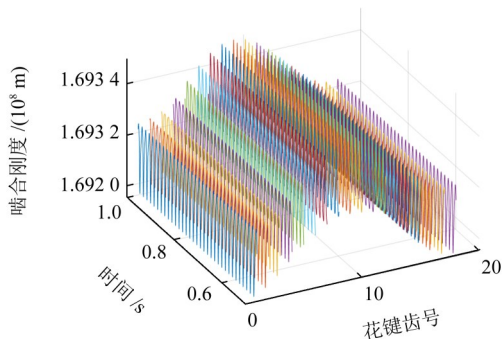
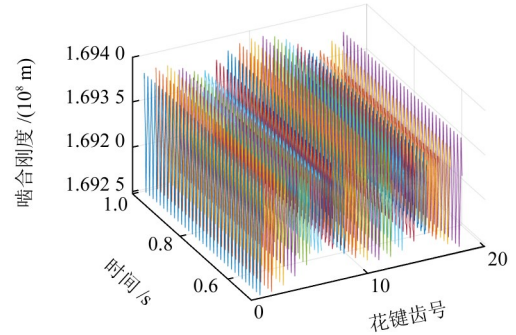
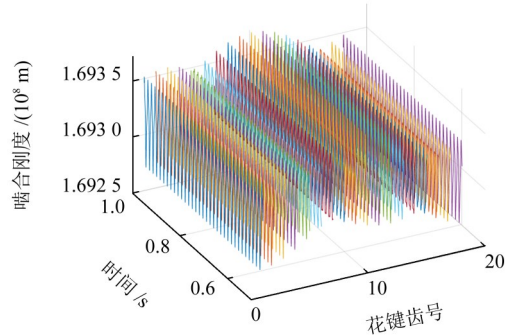
(b) 0.1° 静态角度错位量对花键各齿啮合刚度的影响(c) 0.3° 静态角度错位量对花键各齿啮合刚度的影响(d) 0.5° 静态角度错位量对花键各齿啮合刚度的影响

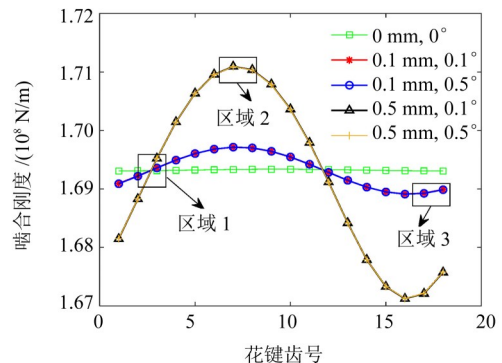
图9 角度错位量对花键各齿啮合刚度的影响规律

Fig. 9 The influence of angular dislocation on the meshing stiffness of each tooth of the spline

1.3.3 综合错位影响的啮合刚度分析

为获得平行错位量和角度错位量综合影响下的花键副啮合刚度的变化规律,同样选取切片数目为30,重点分析4种错位情况对花键啮合刚度的影响。综合错位对花键各齿啮合刚度的影响如图10(a)所示。计算结果表明,当静态平行错位量相同、静态角度错位量分别为 0.1° 和 0.5° 时,花键各齿的啮合刚度数值十分接近;当静态角度错位量相同、静态平行错位量分别为0.1 mm和0.5 mm时,花键各齿的啮合刚度数值差异很大。

静态平行错位量相同时,不同静态角度错位量对应的啮合刚度数值相近,无法清晰看出它们之间的差异。因此,为了更加直观地观察,在曲线最密集处以及两对相近曲线处选择了3个放大区域。图10(b)、图10(c)和图10(d)分别为3个区域的放大图。



(a) 综合错位对花键各齿啮合刚度的影响

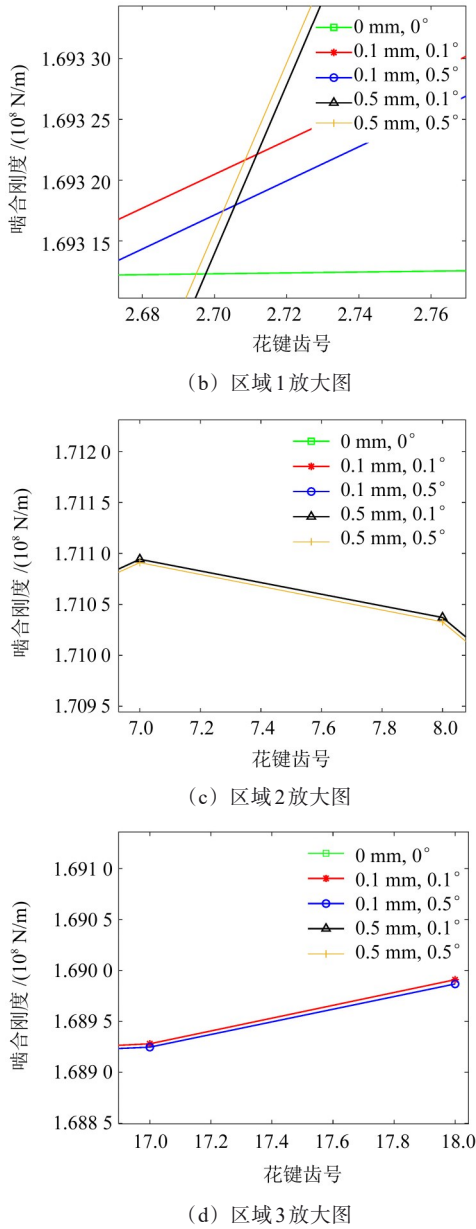


图 10 综合错位对花键各齿啮合刚度的影响

Fig. 10 Effect of comprehensive misalignment on the meshing stiffness of each tooth of the spline

由图可见, 平行错位量相等、角度错位量相差 0.4° 时, 花键啮合刚度变化量的数量级大约为 10^5 , 即单独改变角度错位量对花键啮合刚度的影响并不明显; 角度错位量相等、平行错位量分别为 0.1 mm 和 0.5 mm 时, 花键各齿的啮合刚度变化很大, 变化量的数量级大约为 10^8 , 即单独改变平行错位量对花键啮合刚度的影响很明显。

2 航空花键-转子系统动力学方程

由式(13)可知, 传动系统的动态特性将影响花键副的动态特性, 进而影响花键的啮合长度、花键齿片的等效梯形截面参数^[17]以及花键的啮合刚度。可见, 静态错位量和动态响应引起的错位量将共同

影响错位花键的啮合长度, 使花键的啮合刚度产生动态变化。因此, 为了获得错位花键副对航空传动系统动态响应的影响以及动态响应对花键副啮合刚度的反作用, 提升花键连接副齿形修正的正向设计能力^[18], 构建了考虑花键错位的航空花键-转子系统的等效动力学模型。

航空花键-转子系统主要由错位花键单元、轴单元、轴承单元和质量偏心圆盘单元组成。基于有限元方法, 在花键、轴承和圆盘位置等建立相应单元节点, 获得了航空花键-转子系统的等效动力学模型, 如图 11 所示。图 11 中, 节点 4~6 为内花键轴单元对应节点; 7~9 为外花键轴单元对应节点; 节点 14 为圆盘单元节点; 节点 2 和节点 17 为轴承单元节点; 内外花键通过节点 5 和节点 8 相互耦合。

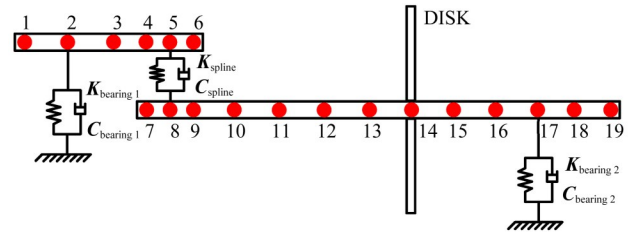


图 11 航空花键-转子系统等效动力学模型

Fig. 11 Equivalent dynamic model of aeronautical spline-rotor system

2.1 轴单元

考虑剪切变形和陀螺效应, 将航空花键-转子系统的转轴划分为若干个轴单元, 每个轴单元包含 2 个节点, 每个节点具有 4 个自由度, 分别为沿 x 、 y 轴方向的平移自由度和绕 x 轴、 y 轴的转动自由度, 如图 7 所示。

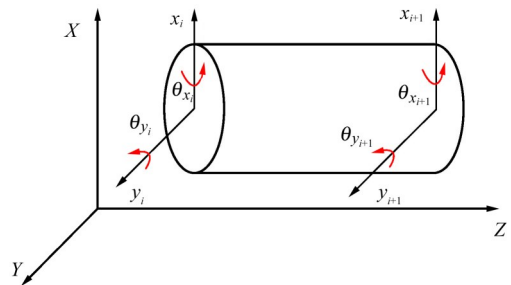


图 12 Timoshenko 梁单元

Fig. 12 Timoshenko Beam elements

轴单元采用 Timoshenko 梁单元进行动力学建模, 轴单元的位移向量可以表示为 $\{q\} = [u_{x1} \ u_{y1} \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ u_{x2} \ u_{y2} \ \theta_{x2} \ \theta_{y2}]^T$ 。根据转子动力学有限元法, 轴单元的动力学方程可以表示为

$$M_e \ddot{q}(t) + [C_e + \Omega G_e] \dot{q}(t) + K_e q(t) = \{Q_e\} \quad (19)$$

式中, M_e 为轴单元的质量矩阵; C_e 为轴单元的阻尼矩阵; G_e 为轴单元的陀螺矩阵; K_e 为轴单元的刚度矩阵; Q_e 为轴单元的外部激励向量。

2.2 质量偏心圆盘单元

在转子系统中,转子的实际物理特性^[19]通常采用圆盘单元模拟,进而对转子系统的动态行为进行准确分析和预测。具有偏心质量的圆盘单元的刚度矩阵和阻尼矩阵可以表示为

$$K_{\text{disk}} = \begin{bmatrix} k_{dx} & & & & & \\ & k_{dy} & & & & \\ & & k_{d\theta x} & & & \\ & & & k_{d\theta y} & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}, C_{\text{disk}} = \begin{bmatrix} c_{dx} & & & & & \\ & c_{dy} & & & & \\ & & c_{d\theta x} & & & \\ & & & c_{d\theta y} & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \quad (20)$$

式中, k_{dx} 和 k_{dy} 分别为圆盘单元沿 x 方向和 y 方向的横向刚度; $k_{d\theta x}$ 和 $k_{d\theta y}$ 分别为圆盘单元沿 x 方向和 y 方向的角向刚度; c_{dx} 和 c_{dy} 分别为圆盘单元沿 x 方向和 y 方向的横向阻尼; $c_{d\theta x}$ 和 $c_{d\theta y}$ 分别为圆盘单元沿 x 方向和 y 方向的角向阻尼。

2.3 轴承单元

考虑平动刚度和平动阻尼^[20]的轴承支撑可简化为线型弹簧模型。轴承单元的刚度矩阵和阻尼矩阵可以表示为

$$K_{\text{bearings}} = \begin{bmatrix} k_{bx} & & & \\ & k_{by} & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, C_{\text{bearings}} = \begin{bmatrix} c_{bx} & & & \\ & c_{by} & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

式中, k_{bx} 和 k_{by} 分别为轴承单元沿 x 方向和 y 方向的横向刚度; c_{bx} 和 c_{by} 分别为轴承单元沿 x 方向和 y 方向的横向阻尼。

2.4 错位花键单元

根据式(16)~式(18),花键单元的整体刚度矩阵和阻尼矩阵可以表示为

$$K_{\text{spline}} = \begin{bmatrix} k_{sx} & & & \\ & k_{sy} & & \\ & & k_{s\theta x} & \\ & & & k_{s\theta y} \end{bmatrix}, C_{\text{spline}} = \begin{bmatrix} c_1 & & & \\ & c_1 & & \\ & & c_2 & \\ & & & c_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

式中, k_{sx} 和 k_{sy} 分别为花键单元沿 x 方向和 y 方向的横向刚度; $k_{s\theta x}$ 和 $k_{s\theta y}$ 分别为花键单元沿 x 方向和 y 方向的角向刚度; c_1 为花键单元的横向阻尼; c_2 为花键单元的角向阻尼^[21]。

2.5 航空花键-转子系统的激振力

2.5.1 偏心圆盘引起的激振力

根据第2.2节可知,偏心圆盘引起的偏心激振力沿 x 方向和 y 方向的分力可表示为

$$\begin{aligned} F_{dx} &= m_d e \Omega^2 \cos(\Omega t) \\ F_{dy} &= m_d e \Omega^2 \sin(\Omega t) \end{aligned} \quad (23)$$

式中, m_d 为圆盘质量; e 为偏心质量与圆盘圆心的距离。

2.5.2 花键错位引起的激振力

对存在错位的花键副,为分析问题的方便,假定只有外花键轴进行相应的错位偏移。则花键错位

引起的激振力沿 x 方向和 y 方向的分力可表示为

$$\begin{aligned} F_{sx} &= 2m_1 \Omega^2 [e_1 \cos(2\Omega t + 2\phi_1) + e_2 \cos(2\phi_2)] \\ F_{sy} &= 2m_1 \Omega^2 [e_1 \sin(2\Omega t + 2\phi_1) + e_2 \sin(2\phi_2)] \end{aligned} \quad (24)$$

式中, m_1 为外花键质量; e_1 为错位情况下的外花键静态偏差, $e_1 = \sqrt{L_x^2 + L_y^2}$; e_2 为错位情况下的外花键动态偏差, $e_2 = \sqrt{\Delta u_x^2 + \Delta u_y^2}$; ϕ_1 为错位情况下外花键静态错位引入的相位角, $\phi_1 = \arctan(L_y/L_x)$; ϕ_2 为错位情况下由外花键动态错位引入的相位角, $\phi_2 = \arctan(\Delta u_y/\Delta u_x)$ 。

2.6 系统动力学方程

组装系统中各个部件的质量、刚度、阻尼、陀螺矩阵,并将系统的激振力向量添加至相应节点位置^[22],可获得航空花键-转子系统的动力学方程,即

$$M\ddot{q}(t) + [C + \Omega G]\dot{q}(t) + Kq(t) = \{Q_d\} + \{Q_s\} \quad (25)$$

式中, M 为转子系统的质量矩阵; C 为转子系统的阻尼矩阵; G 为转子系统的陀螺矩阵; K 为转子系统的刚度矩阵; Q_d 为圆盘单元引起的偏心激振力向量; Q_s 为错位花键引起的激振力向量。

图13为转子系统的总体矩阵组装方式示意图。图13中,等号左端代表各单元节点对应的矩阵;等号右边代表最终组装完毕的整个传动系统的矩阵。其中,红色部分表示相邻单元节点矩阵的叠加部分。

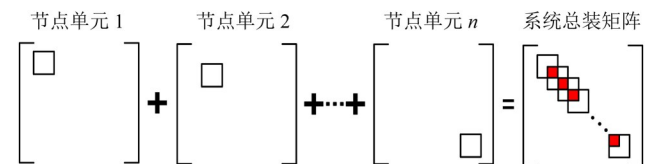


图13 转子系统总体矩阵组装示意图

Fig. 13 The overall matrix assembly method of the rotor system

2.7 等效动力学模型的临界转速验证

为验证航空花键-转子系统的等效动力学模型的正确性,采用Ansys商业有限元分析软件获得了转子转子系统的Campell图和临界转速,并与基于Matlab软件开发的计算程序获得的结果进行了对比。图14为采用Ansys软件仿真获得的Campell图;图15为采用Matlab编程获得的Campell图。图中,虚线表示1x激励线,红色三角形表示1x激励线与固有频率曲线的交点,即临界转速点。

由于临界转速的数值会随着正反涡动而产生变化,所以,一般选择正向涡动对应的临界转速作为转子系统的临界转速。采用Ansys软件仿真获得的临界转速与采用Matlab编程获得的临界转速结果对比如表1所示。由表1可以看出,临界转速计算结果的最大误差不超过3%。因此,本文构建的动力学模型具有一定的可信性。

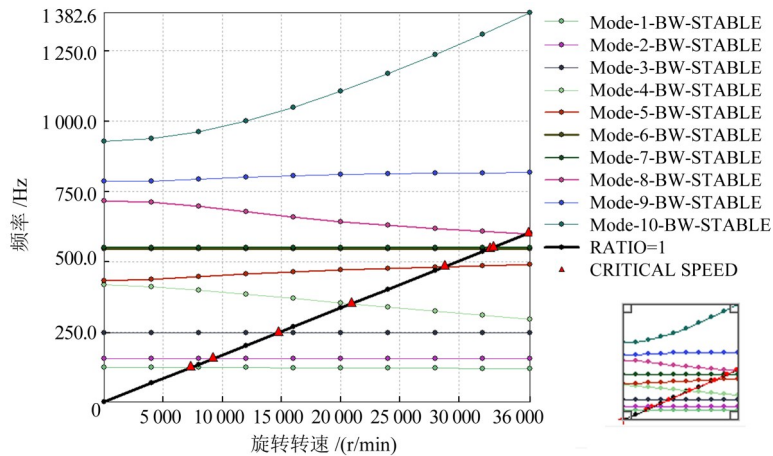


图 14 Ansys 软件仿真获得的 Campell 图

Fig. 14 Campell plot calculated using Ansys

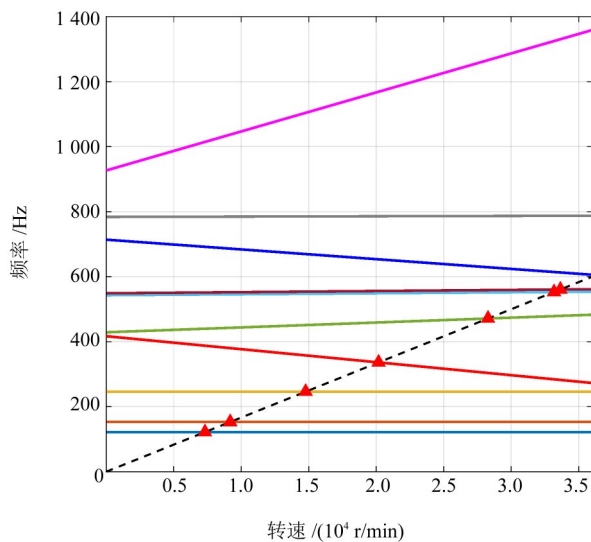


图 15 Matlab 计算程序获得的 Campell 图

Fig. 15 Campell diagram calculated using Matlab

表 1 临界转速结果对比

Tab. 1 Comparison of critical speed results

	Ansys 仿真/(r/min)	Matlab 计算/(r/min)	误差/%
1 阶临界转速	9 217.9	9 186.89	0.34
2 阶临界转速	28 827	28 285.7	1.88
3 阶临界转速	32 893	33 646.6	2.29

3 结果与讨论

根据构建的等效转子系统动力学方程, 运用 Newmark- β 法求解了系统动力学方程, 并将得到的位移响应反馈至花键啮合长度, 经过反复迭代, 求解了花键单齿啮合刚度, 并重点分析了不同错位情况下花键单元和圆盘单元的动态特性。具体的求解流程如图 16 所示; 航空花键-转子系统的工况及花键参数如表 2 所示。

3.1 平行错位对转子系统动力学响应的影响

为获得单因素变化对转子系统的动力学响应的影响, 假定静态角度错位量为 0, 取静态平行错位

量分别为: 0.1、0.2、0.3、0.4、0.5 mm, 获得了转子系统花键节点和圆盘节点的动力学响应。平行错位对花键节点动力学响应的影响如图 17 所示。由图 17(a)可知, 花键节点的轴心轨迹呈规则的椭圆状, 内外环大小接近。随着静态平行错位量逐渐增大, 花键节点的轴心轨迹逐渐扩大。

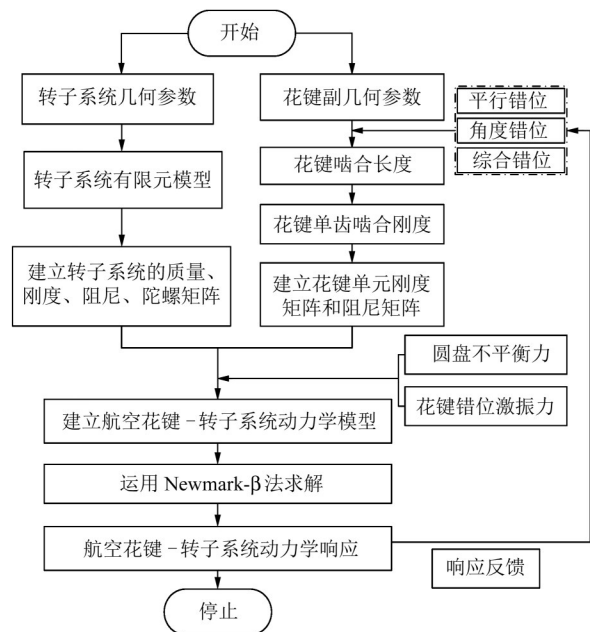


图 16 求解流程图

Fig. 16 Solve the flow chart

由图 17(b)可知, 花键节点的位移响应呈波动状态。截取 1.9~2 s 时间区间的动态响应可以发现, 增大静态平行错位量, 位移响应的波动范围逐渐增大, 位移峰值几乎呈等比例增长, 峰值增大大约 108.70%。

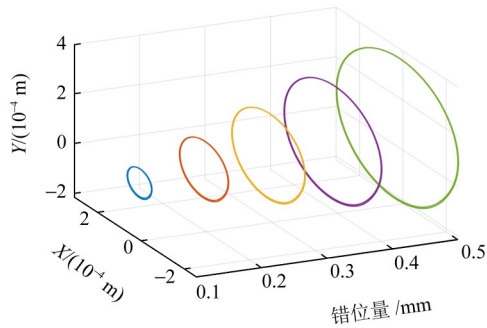
平行错位对圆盘节点动力学响应的影响如图 18 所示。由图 18(a)可知, 圆盘节点的轴心轨迹呈椭圆状且具有内环, 相比于花键节点, 圆盘节点的内环更加明显。随着静态平行错位量增大, 轴心轨迹逐

渐扩大，且增大的内环逐渐靠近外环。

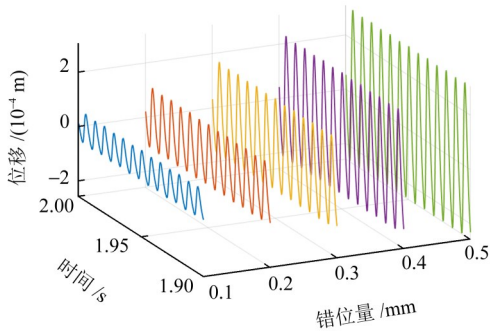
表2 系统工况及花键参数

Tab. 2 Rotor system parameters and spline geometry parameters

名称	数值
输入功率 P/kW	320
输入转速 $\Omega/(\text{r}/\text{min})$	4 000
花键模数 m/mm	2.5
花键齿数 z	18
花键齿宽 B/mm	16
压力角 $\alpha/(\text{°})$	30
弹性模量 E/GPa	211
轴承径向刚度 (N/m)	1×10^7
轴承角向刚度 (N/m)	0
轴承径向阻尼 $(\text{N} \cdot \text{s}/\text{m})$	1 000
轴承角向阻尼 $(\text{N} \cdot \text{s}/\text{m})$	0



(a) 轴心轨迹



(b) 位移响应

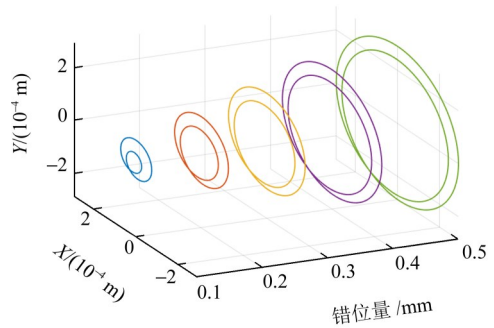
图17 平行错位对花键节点动力学响应的影响

Fig. 17 Effect of parallel misalignment on dynamic response of spline nodes

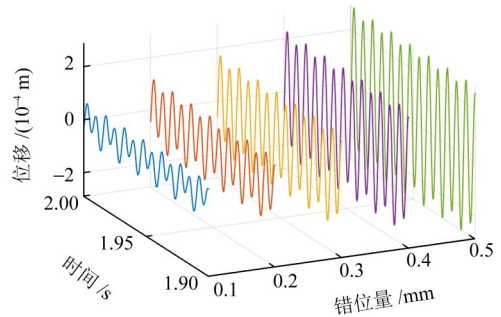
由图18(b)可知，圆盘节点的位移响应呈波动状态。截取1.9~2 s时间区间的动态响应可以发现，增大静态平行错位量，位移响应的波动范围逐渐增大，且位移响应的两个波峰逐渐接近，位移峰值增大约79.40%。

3.2 角度错位对转子系统动力学响应的影响

为获得单因素变化对转子系统动力学响应的影响，假定静态平行错位量为0，取静态角度错位量分别为： 0.1° 、 0.2° 、 0.3° 、 0.4° 、 0.5° ，获得了转子系统花键节点和圆盘节点的动力学响应。



(a) 轴心轨迹

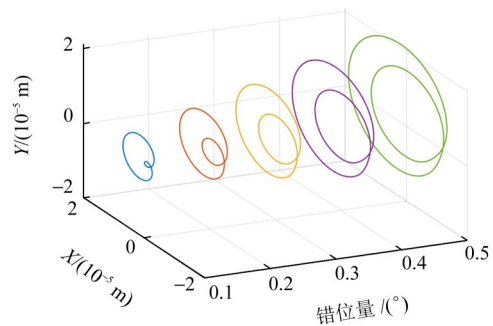


(b) 位移响应

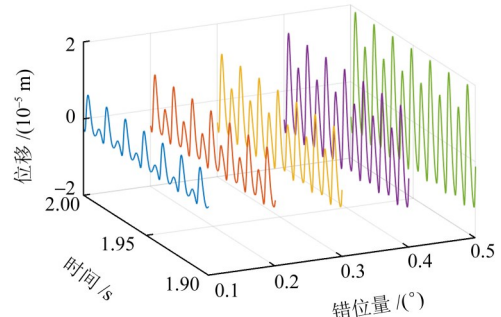
图18 平行错位对圆盘节点动力学响应的影响

Fig. 18 Effect of parallel misalignment on dynamic response of disc nodes

角度错位对花键节点动力学响应的影响如图19所示。



(a) 轴心轨迹



(b) 位移响应

图19 角度错位对花键节点动力学响应的影响

Fig. 19 Effect of angular misalignment on dynamic response of spline nodes

由图19(a)可知，随着静态角度错位量的增大，轴心轨迹逐渐扩大，且增大内环逐渐靠近外环。由图19(b)可知，相较于平行错位，花键节点的位移响应

波动更加复杂。截取1.9~2 s的时间区间动态响应可以发现, 增大静态角度错位量, 位移响应的波动范围逐渐增大, 位移响应曲线的两个波峰逐渐接近, 峰值平均增大大约42.62%, 比平行错位下的变化更加平缓。

角度错位对圆盘节点动力学响应的影响如图20所示。由图20(a)可知, 圆盘节点的轴心轨迹是椭圆状, 随着静态角度错位量逐渐增大, 轴心轨迹逐渐扩大, 且轴心轨迹出现内凹。

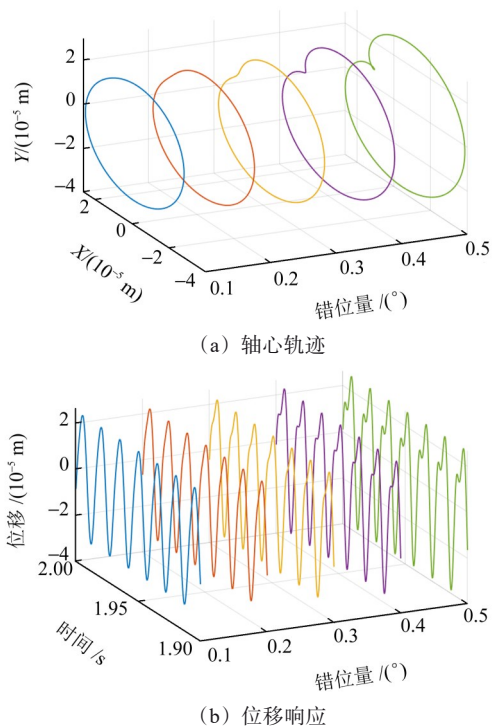


图20 角度错位对圆盘节点动力学响应的影响

Fig. 20 Effect of angular misalignment on dynamic response of disc nodes

由图20(b)可知, 圆盘节点的位移响应呈波动状态。截取1.9~2 s的时间区间的动态响应可以发现, 增大静态角度错位量, 位移响应的波动范围很小, 平均增大大约0.13%。

3.3 综合错位对转子系统动力学响应的影响

为探究综合错位对转子系统的动力学响应的影响, 重点分析了5组综合错位情况(0.1 mm, 0.1°; 0.2 mm, 0.2°; 0.3 mm, 0.3°; 0.4 mm, 0.4°; 0.5 mm, 0.5°)对转子系统动态特性的影响。综合错位对转子系统花键节点的动态响应如图21所示。图21中, 错位量0.1表示第一组综合错位情况, 其他依此类推。由图21(a)可知, 花键节点的轴心轨迹呈椭圆状, 随着综合错位量逐渐增大, 轴心轨迹逐渐扩大, 且内外环大小接近。

由图21(b)可知, 花键节点的位移响应呈波动状态, 随着综合错位量的增大, 位移响应的波动范围逐渐增大, 位移响应波动形式较为规律, 位移响应

曲线与平行错位情况类似。

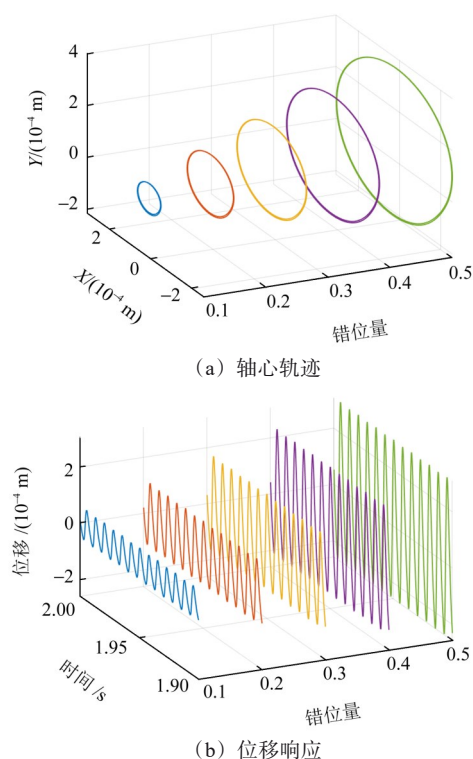


图21 综合错位对花键节点动力学响应的影响

Fig. 21 Effect of comprehensive misalignment on dynamic response of spline nodes

综合错位对圆盘节点动力学响应的影响如图22所示。由图22(a)可知, 圆盘节点的轴心轨迹呈椭圆状, 且内外环相差较大; 随着综合错位量增大, 轴心轨迹逐渐增大。

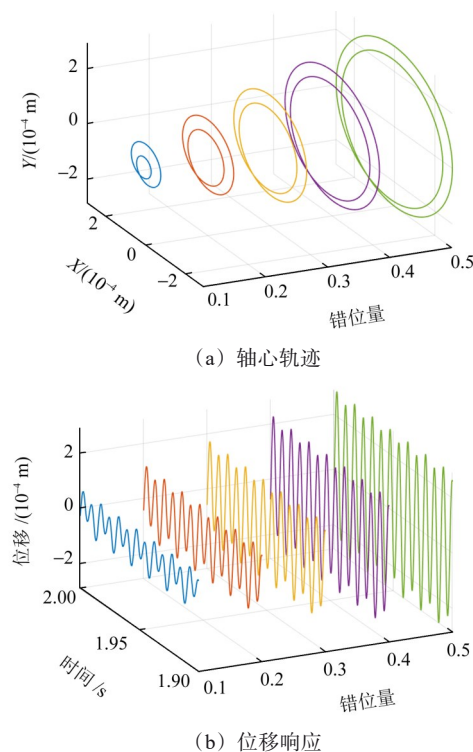


图22 综合错位对圆盘节点动力学响应的影响

Fig. 22 Effect of comprehensive misalignment on dynamic response of disc nodes

由图22(b)可知,圆盘节点的位移响应呈波动状态,随着综合错位量的逐渐增大,位移响应的波动范围逐渐增大,并且位移响应波动形式逐渐规律,位移响应曲线与平行错位情况类似。

4 结论

本文将切片法和石川法进行创新性结合,引入花键啮合长度的概念,并将其等效为花键单齿切片的等效梯形截面的腰长,获得了花键单齿的啮合刚度;并根据构建的转子系统等效动力学模型,分析了花键错位对花键节点和圆盘节点动态响应的影响。主要结论有:

1) 影响花键啮合刚度的主要因素是花键的啮合长度和花键单元的动力学特性。不同错位情况下,花键的啮合长度和花键的振动位移存在差异,在二者的共同作用下,花键的啮合刚度也相应产生变化。

2) 静态平行错位量和静态角度错位量的增大,都会使得花键的啮合长度增大;同时,花键单元的振动位移增大,最终导致花键的啮合刚度增大。

3) 花键的啮合刚度和转子系统的动力学特性对静态平行错位量更加敏感。相比于静态角度错位量,静态平行错位量对花键的啮合长度以及花键单元的动力学特性影响更大。因此,对含有花键连接的转子系统,控制静态平行错位量,可以更好地改善传动系统的动力学性能。

参 考 文 献

- [1] 王永亮,赵广,徐永强,等. 不对中多浮动花键接触刚度识别及动力学应用[J]. 航空动力学报,2025,40(4):20240738.
WANG Yongliang, ZHAO Guang, XU Yongqiang, et al. Contact stiffness identification of misaligned multiple floating splines and its dynamic application[J]. Journal of Aerospace Power, 2025, 40(4):20240738.
- [2] DA SILVA TUCKMANTEL F W, CAVALCA K L. Vibration signatures of a rotor-coupling-bearing system under angular misalignment[J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 133:559-583.
- [3] 朱晔,李坚,孙继堂,等. 浮动花键接触有限元模型及不对中接触特性研究[J]. 科学技术创新,2024(9):63-66.
ZHU Ye, LI Jian, SUN Jitang, et al. Finite element model of floating spline contact and study of misaligned contact characteristics[J]. Scientific and Technological Innovation, 2024(9):63-66.
- [4] 赵阳,潘冬,李娜. 齿轮传动系统动力学研究进展与思考[J]. 机械传动,2014,38(3):172-177.
ZHAO Yang, PAN Dong, LI Na. Research progress and thinking of gear transmission system dynamics[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2014, 38(3):172-177.
- [5] MARMOL R A, SMALLEY A J, TECZA J A. Spline coupling induced nonsynchronous rotor vibrations[J]. Journal of Mechanical Design, 1980, 102(1):168-176.
- [6] ROGER KU C P, WALTON J F, LUND J W. Dynamic coefficients of axial spline couplings in high-speed rotating machinery[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1994, 116(3):250-256.
- [7] NATARAJ C, KAPPAGANTHU K. Nonlinear response in a rotor system with a coulomb spline [M]//Dynamical Systems. New York, NY: Springer New York, 2010:105-120.
- [8] MIAO X Y, JIANG D, AI X, et al. Dynamic characteristics of rotor system with parallel and angular misaligned involute spline coupling[J]. Meccanica, 2024, 59(7):1061-1085.
- [9] 霍启新. 考虑不对中的航空渐开线花键副非线性动态啮合力研究[D]. 西安:陕西科技大学,2020:23-37.
HUO Qixin. Study on nonlinear dynamic meshing force of involute SplineCouplings in aero-engine with misalignment[D]. Xi'an: Shaanxi University of Science & Technology, 2020:23-37.
- [10] LIU S G, MA Y H, ZHANG D Y, et al. Studies on dynamic characteristics of the joint in the aero-engine rotor system[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2012, 29:120-136.
- [11] HU X L, HU B, ZHANG F T, et al. Influences of spline assembly methods on nonlinear characteristics of spline-gear system [J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 127:33-51.
- [12] ZHU H M, CHEN W F, ZHU R P, et al. Modelling and dynamic analysis of spline-connected multi-span rotor system[J]. Meccanica, 2020, 55(6):1413-1433.
- [13] SHI J L, MA X G, XU C L, et al. Meshing stiffness analysis of gear using the ishikawa method[J]. Applied Mechanics and Materials, 2013, 401/402/403:203-206.
- [14] XUE X Z, LIU J, LI Y F, et al. Nonlinear dynamic analysis of floating involute splines considering comprehensive misalignment [J]. Journal of Sound and Vibration, 2023, 555:117720.
- [15] ZHANG C, CAO P, ZHU R P, et al. Dynamic modeling and analysis of the spline joint-flexible coupling-rotor system with misalignment[J]. Journal of Sound and Vibration, 2023, 554:117696.
- [16] YU P C, WANG C, LIU Y L, et al. Analytical modeling of the lateral stiffness of a spline coupling considering teeth engagement and influence on rotor dynamics[J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2022, 92:104468.
- [17] 覃汝庆,朱江新,覃频频. 驱动桥半轴啮合齿数和长度对半轴强度的影响[J]. 装备制造技术,2016(9):26-28.
QIN Ruqing, ZHU Jiangxin, QIN Pinpin. The number of teeth and the length engagement of drive axle shaft affect the axle strength [J]. Equipment Manufacturing Technology, 2016(9):26-28.
- [18] 王先旭. 基于修形的变厚齿轮副非线性振动特性研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,2023:42-61.
WANG Xianxu. Research on nonlinear vibration characteristics of

- beveloid gear pair based on modification[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2023: 42-61.
- [19] 施则高. 航空发动机复杂转子的转静子碰摩动力学特性研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2020: 11-13.
- SHI Zegao. Research on dynamic characteristics of complex rotor of aero-engine with rubbing of rotor and stator[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2020: 11-13.
- [20] AL-HUSSAIN K M. Dynamic stability of two rigid rotors connected by a flexible coupling with angular misalignment[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 266(2): 217-234.
- [21] YU P C, WANG C, LIU Y L, et al. Analytical modeling of the lateral stiffness of a spline coupling considering teeth engagement and influence on rotor dynamics[J]. European Journal of Mechanics - A/Solids, 2022, 92: 104468.
- [22] 赵宁, 付晨曦, 赵永志, 等. 基于动力学的分扭传动系统均载特性分析[J]. 机械传动, 2014, 38(11): 22-25, 35.
- ZHAO Ning, FU Chenxi, ZHAO Yongzhi, et al. Load sharing characteristic analysis of a torque-split transmission system based on dynamics[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2014, 38(11): 22-25, 35.

Analysis of dynamic characteristics of misaligned splines in aviation spline-rotor system

ZHONG Wenxin JIN Guanghu ZHU Rupeng

(National Key Laboratory of Helicopter Dynamics, College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: [Objective] Splines are important connectors in aviation power transmission systems, and are affected by manufacturing errors, assembly errors or working loads, and often occur in parallel misalignment, angular misalignment and comprehensive misalignment, which affects the meshing length and bearing capacity of each tooth of the spline. In order to improve the stability of the transmission system and reduce the failure rate of aviation splines, it is necessary to analyze the dynamic meshing stiffness characteristics of misaligned splines. [Method] The dynamic model of the aviation spline-rotor system was established, the time-varying meshing length of the spline was solved, and the slicing method and the Ishikawa method were combined to obtain the stiffness of the spline single tooth meshing under different dislocation conditions and the dynamic response of the system was solved. [Result] The results show that the change amplitude of spline single-tooth meshing stiffness and the dynamic response of the rotor system increase when the static parallel dislocation and static angular dislocation amount are increased. The static parallel dislocation amount remains unchanged, and the static angular dislocation amount changes, and the change of spline meshing stiffness and the dynamic response of the rotor system is not obvious. The static angular dislocation amount remains unchanged, and the static parallel dislocation amount increases, and the spline meshing stiffness and the dynamic response of the rotor system change significantly.

Key words: Aero spline; Rotor dynamics; Meshing stiffness; Newmark-Beta method