

## 无侧隙端面滚子包络蜗杆传动啮合性能分析

王凯<sup>1</sup> 豆晨阳<sup>2</sup> 陈永洪<sup>2</sup>

(1. 成都工业职业技术学院 智能制造与汽车学院, 成都 610000)

(2. 重庆大学 高端装备机械传动全国重点实验室, 重庆 400044)

**摘要:**【目的】滚子包络环面蜗杆传动在数控转台中应用广泛, 但存在误差敏感性高、负压力角齿面安装困难等问题。为此, 提出一种无侧隙端面滚子包络蜗杆传动副, 通过一侧传递运动、一侧消除的啮合方式实现无侧隙传动, 旨在提升数控转台的传动精度与承载能力。【方法】首先, 基于空间啮合理论和微分几何, 建立了无侧隙端面滚子包络蜗杆传动副的数学模型; 其次, 推导了啮合方程、接触线、齿面方程、诱导法曲率、润滑角与相对卷吸速度等啮合性能参数的数学表达式; 最后, 利用 Matlab 软件分析了传动副几何参数对啮合性能的影响规律, 并验证了所提设计方法的正确性。【结果】研究表明, 该传动副的理论啮合齿对数为 5 对, 具有较高的承载能力。其中, 3 对以上啮合齿对的润滑角保持在  $85^\circ$  左右, 润滑性能良好; 诱导法曲率低于  $0.25 \text{ mm}^{-1}$ , 说明蜗轮蜗杆共轭齿面贴合度较高。该设计为高精度数控转台蜗杆传动系统的研发提供了参考。

**关键词:** 端面滚子; 包络蜗杆; 无侧隙啮合; 啮合性能

**中图分类号:** TH132.41 **DOI:** 10.16578/j.issn.1004.2539.2026.03.015

## 0 引言

蜗杆传动副具有结构紧凑、传动平稳、振动噪声小等优点, 在数控转台市场应用广泛。受数控机床工作条件影响, 随着机床的使用频率越来越高, 蜗轮副之间的磨损会日益增大, 易造成蜗轮副的反向间隙增大, 严重影响数控转台的精度。生产中发现, 单滚子包络环面蜗杆传动副存在圆周滚子精密加工难度大、环面蜗杆形式对误差敏感性高、负压力角形式安装困难、径向结构不紧凑、转台空间大等不足<sup>[1]</sup>。为此, 提出一种精密高效无侧隙端面滚子包络蜗杆传动副, 通过一侧传递运动、一侧消除的啮合实现无侧隙, 以解决上述问题。

在滚子包络蜗杆传动理论研究方面, 王进戈等<sup>[2-6]</sup>提出无侧隙双滚子包络环面蜗杆传动, 围绕其结构和传动原理、啮合性能、参数优化、参数化建模、运动仿真、误差对无侧隙双滚子包络环面蜗杆啮合性能的影响等问题进行了全面的研究。邓星桥等<sup>[7-8]</sup>推导蜗杆传动的齿面接触螺旋线方程, 获得无侧隙双滚子包络环面蜗杆的真实啮合齿面, 基于遗传算法进行了无侧隙双滚子包络环面蜗杆传动的参数优化设计。李阳等<sup>[9-10]</sup>采用高级语言进行二次开发,

在 CAD 软件中利用 SQL Server 数据库技术构建快速设计系统, 实现双滚子包络环面蜗杆快速变型设计。廖鸿辉等<sup>[11-17]</sup>在倾斜式双圆柱滚子包络环面蜗杆传动的啮合理论、实体建模、几何特性分析、承载能力、加工及性能测试、润滑分析等方面展开了研究。王凯等<sup>[18-21]</sup>开展了滚子包络端面啮合蜗杆传动啮合理论、啮合性能、有限元分析、加工设备研制等理论与试验研究。陈燕等<sup>[22]</sup>对变齿厚渐开线齿轮包络环面蜗杆传动展开了啮合性能分析。任雯等<sup>[23]</sup>对点接触共轭渐开线蜗杆副啮合理论及性能进行了分析。YE 等<sup>[24]</sup>开展了渐开线斜齿轮与双导程渐开线圆柱蜗杆啮合的新型侧隙可调蜗杆传动研究。目前, 尚未见到报道有关无侧隙端面滚子包络蜗杆传动副系统的数学模型建立、啮合几何学研究及啮合性能分析的研究。

本文针对无侧隙端面滚子包络蜗杆传动的设计等基础问题, 研究了传动副的啮合几何学模型、啮合分析相关方程、蜗杆几何参数对啮合性能的影响。

## 1 传动副数学模型

### 1.1 坐标系的设置

无侧隙端面滚子包络蜗杆传动的坐标系设置如图 1

收稿日期: 2024-12-06

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(52075054)

作者简介: 王凯, 女, 1983 年生, 吉林洮南人, 博士, 教授; 主要研究方向为机械传动; 57435843@qq.com。

引用格式: 王凯, 豆晨阳, 陈永洪. 无侧隙端面滚子包络蜗杆传动啮合性能分析[J]. 机械传动, 2026, 50(3): 132-141.

WANG Kai, DOU Chenyang, CHEN Yonghong. Meshing performance analysis of non-backlash end-face roller enveloping cylindrical worm drive[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2026, 50(3): 132-141.



免费获取

所示。图1中,  $\Sigma_n(O_n, x_n, y_n, z_n)$ 为蜗杆静坐标系;  $\Sigma_m(O_m, x_m, y_m, z_m)$ 为蜗轮静坐标系;  $\Sigma_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$ 为蜗杆动坐标系;  $\Sigma_2(O_2, x_2, y_2, z_2)$ 为蜗轮动坐标系;  $z_1 = z'_1$ 为蜗杆回转轴;  $z_2 = z'_2$ 为蜗轮回转轴;  $\omega_1$ 为蜗杆的角速度矢量;  $\omega_2$ 为蜗轮的角速度矢量。蜗轮的轮齿为单滚子, 安装在与蜗轮轴平行的蜗轮端面上。  $\varphi_1$ 为蜗杆绕回转轴的转动角度;  $\varphi_2$ 为蜗轮绕回转轴的转动角度;  $a$ 为中心距。

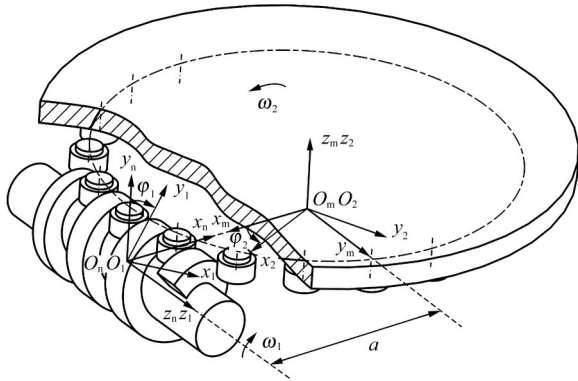


图1 蜗轮传动坐标系  
Fig. 1 Coordinate systems of the worm drive

由图1可知,  $\varphi_1/\varphi_2 = \omega_1/\omega_2 = Z_2/Z_1 = i_{12} = 1/i_{21}$  其中,  $Z_1$ 为蜗杆头数;  $Z_2$ 为蜗轮齿数;  $i_{12}$ 为传动比。当  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  时, 蜗杆动坐标系与静坐标系重合, 蜗轮的动坐标系与静坐标系重合。

滚柱上活动标架的设置如图2所示。图2中,  $\Sigma_0(O_0, x_0, y_0, z_0)$ 为设置在蜗轮滚子柱顶的坐标系;  $\Sigma_p(O_p, e_1, e_2, n)$ 为柱面上位于点  $p$  的坐标系。

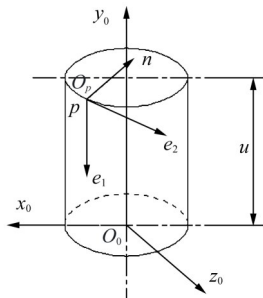


图2 滚柱上活动标架的设置  
Fig. 2 Setting of the moving frame on the roller

图3所示为滚柱与蜗轮固接坐标系关系。令柱顶  $O_0$ 点在  $\Sigma_2$ 中的坐标为  $(a_2, b_2, c_2)$ 。

### 1.2 坐标变换

下面详述包络过程中蜗杆传动的底矢转换、坐标变换过程。

#### 1.2.1 固定标架设置及底矢转换与坐标变换

##### 1) 蜗杆动静坐标变换

根据图1中蜗杆固定坐标系  $\Sigma_n$ 与活动坐标系  $\Sigma_1$ 之间的坐标变换关系, 可得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ 1 \end{pmatrix} = M_{1n} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

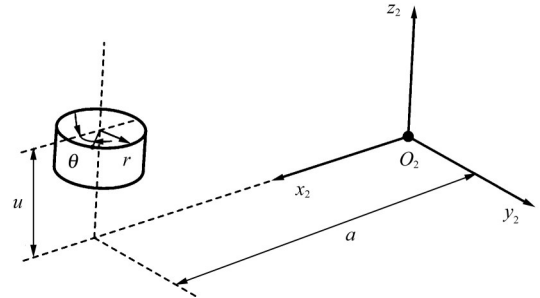


图3 滚柱与蜗轮活动标架的设置

Fig. 3 Setting of the roller and the worm wheel moving frame

##### 2) 蜗杆与蜗轮的静坐标变换

根据图1中蜗杆坐标系  $\Sigma_n$ 与蜗轮固定坐标系  $\Sigma_m$ 之间的坐标变换关系, 可得

$$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ 1 \end{pmatrix} = M_{mn} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

##### 3) 蜗轮动静标架的坐标变换

根据图1中蜗轮固定坐标系  $\Sigma_m$ 与活动坐标系  $\Sigma_2$ 之间的坐标变换关系, 可得

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \\ 1 \end{pmatrix} = M_{2m} \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

##### 4) 蜗杆与蜗轮的动坐标变换

经计算可得蜗杆动坐标系  $\Sigma_1$ 与蜗轮动坐标系  $\Sigma_2$ 的坐标变换关系, 即

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} = M_{2m} M_{mn} M_{n1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = M_{21} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 & -\cos \varphi_2 \sin \varphi_1 & \sin \varphi_2 & a \cos \varphi_2 \\ \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 & \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & -a \sin \varphi_2 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

#### 1.2.2 活动标架设置及底矢转换与坐标变换

根据图2、图3, 柱面方程在坐标系  $\Sigma_0$ 中可表示为

$$\begin{cases} r_0 = x_0 i_0 + y_0 j_0 + z_0 k_0 \\ x_0 = r \cos \theta \\ y_0 = r \sin \theta \\ z_0 = u \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $i_0, j_0, k_0$ 分别为坐标系  $\Sigma_0$ 中3个坐标轴方向的底矢。

1) 滚柱柱面坐标系  $\Sigma_0$  与点  $p$  的坐标系  $\Sigma_p$  底矢的变换关系为

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} = A_{0p} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 & -\cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ n \end{pmatrix} \quad (6)$$

2) 蜗轮动坐标系  $\Sigma_2$  与蜗轮柱面坐标系  $\Sigma_0$  的坐标变换关系为

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} = M_{02} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

3) 蜗杆动坐标系  $\Sigma_1$  与蜗轮柱面坐标系  $\Sigma_0$  的坐标变换关系为

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} = M_{02} M_{21} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = M_{01} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 & -\cos \varphi_2 \sin \varphi_1 & \sin \varphi_2 & a \cos \varphi_2 \\ \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 & \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & -a \sin \varphi_2 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

4) 蜗轮柱面坐标系  $\Sigma_0$  与蜗轮动坐标系  $\Sigma_2$  底矢的变换关系为

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} = A_{20} A_{0p} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ n \end{pmatrix} = A_{2p} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 & -\cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ n \end{pmatrix} \quad (9)$$

### 1.3 相对速度与相对角速度

图4所示为端面滚子包络蜗杆传动的相对运动矢量关系。运用矢量关系及坐标变换矩阵,可以得到该蜗杆传动的相对速度和相对角速度在  $\Sigma_p$  中的投影。

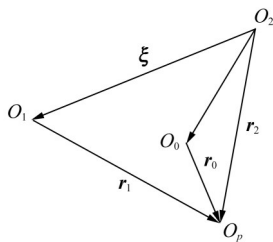


图4 接触点的矢量关系

Fig. 4 Vector relation of contact points

根据矢量关系,  $r_0$  为  $O_p$  在  $\Sigma_0$  中的矢径;  $r_1$  为  $O_p$  在  $\Sigma_1$  中的矢径;  $r_2$  为  $O_p$  在  $\Sigma_2$  中的矢径;  $\xi$  为中心距  $a$  在  $\Sigma_m$  中的矢径。

设  $O_0$  在  $\Sigma_2$  中的坐标为  $(a_2, b_2, c_2)$ , 有

$$\begin{cases} a_2 = a \\ b_2 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

图4中存在的几何关系可表示为  $r_2 = l_{O_2 O_0} + r_{00}$ 。在  $\Sigma_2$  中,  $l_{O_2 O_0} = a_2 i_2 + b_2 j_2 + c_2 k_2$ 。其中,  $i_2, j_2, k_2$  分别为  $\Sigma_2$  中3个坐标轴方向的底矢。

根据蜗轮和蜗杆的相对运动关系,其相对速度矢量为

$$V^{(12)} = \frac{d\xi}{dt} + \omega^{(12)} \times r_1 - \omega_2 \times \xi \quad (11)$$

经计算可得

$$\begin{cases} V^{(12)} = B_1 i_2 + B_2 j_2 + B_3 k_2 \\ B_1 = -i_{21} y_2 + z_2 \cos \varphi_2 \\ B_2 = i_{21} x_2 - z_2 \sin \varphi_2 \\ B_3 = y_2 \sin \varphi_2 - x_2 \cos \varphi_2 + a \end{cases} \quad (12)$$

经底矢变换,蜗轮和蜗杆的相对速度、相对角速度在活动标架  $\Sigma_p$  中可分别表示为

$$\begin{cases} V^{(12)} = V_1^{(12)} e_1 + V_2^{(12)} e_2 + V_n^{(12)} n \\ V_1^{(12)} = -B_1 \sin \theta + B_2 \cos \theta \\ V_2^{(12)} = -B_3 \end{cases} \quad (13)$$

$$V_n^{(12)} = -B_1 \cos \theta - B_2 \sin \theta$$

$$\begin{cases} \omega^{(12)} = \omega_1^{(12)} e_1 + \omega_2^{(12)} e_2 + \omega_n^{(12)} n \\ \omega_1^{(12)} = -\sin \theta \sin \varphi_2 + \cos \theta \cos \varphi_2 \\ \omega_2^{(12)} = -i_{21} \end{cases} \quad (14)$$

$$\omega_n^{(12)} = -\cos \theta \sin \varphi_2 - \sin \theta \cos \varphi_2$$

式中,  $V_1^{(12)}, V_2^{(12)}, V_n^{(12)}$  分别为在活动标架  $\Sigma_p$  下相对速度矢量  $V^{(12)}$  的投影;  $\omega_1^{(12)}, \omega_2^{(12)}, \omega_n^{(12)}$  分别为在活动标架  $\Sigma_p$  下相对角速度矢量  $\omega^{(12)}$  的投影;  $e_1, e_2, n$  分别为活动标架  $\Sigma_p$  的3个底矢。

### 1.4 啮合方程与齿面方程

#### 1.4.1 啮合函数与啮合方程

传动啮合表达式为

$$\Phi = n V^{(12)} = 0 \quad (15)$$

啮合函数为

$$\Phi = V_n^{(12)} = -u \cos \theta \cos \varphi_2 + u \sin \theta \sin \varphi_2 - a i_{21} \sin \theta \quad (16)$$

啮合方程为

$$\Phi = V_n^{(12)} = -u \cos \theta \cos \varphi_2 + u \sin \theta \sin \varphi_2 - a i_{21} \sin \theta = 0 \quad (17)$$

滚子参数  $u, \theta$  之间的函数关系为

$$\begin{cases} u = f(\theta, \varphi_2) = B_4 / B_5 \\ B_4 = a i_{21} \sin \theta \\ B_5 = -\cos \theta \cos \varphi_2 + \sin \theta \sin \varphi_2 \end{cases} \quad (18)$$

则有

$$\tan \theta = \frac{u \cos \varphi_2}{-a i_{21} + u \sin \varphi_2} \quad (19)$$

#### 1.4.2 接触线

接触线方程为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_0 = x_0 \mathbf{i}_0 + y_0 \mathbf{j}_0 + z_0 \mathbf{k}_0 \\ u = B_4/B_5 \\ \varphi_2 = C_{\text{constant}} \end{cases} \quad (20)$$

式中,  $C_{\text{constant}}$  为常数。

式(20)为蜗轮齿面上接触线在  $\Sigma_0$  中的表达式。将滚柱柱面展开到与圆柱相切于  $\theta = 0^\circ$  这条圆柱母线的平面上, 如图5所示。则柱面上任一点  $(u, \theta)$  映射到  $x_4 y_4$  平面上有

$$\begin{cases} x_4 = u \sin \theta \\ y_4 = u \cos \theta \end{cases} \quad (21)$$

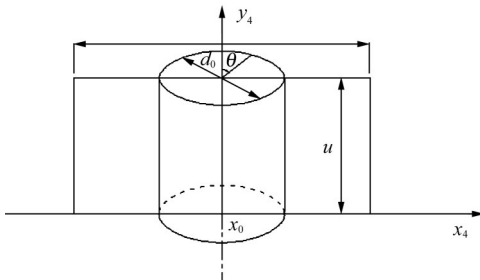


图5 柱面与展开矩形坐标关系

Fig. 5 Coordinate relation between the cylindrical surface and the expanded rectangle

### 1.4.3 齿面方程

根据啮合原理<sup>[25]</sup>, 无侧隙端面滚子包络蜗杆齿面方程为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = x_1 \mathbf{i}_1 + y_1 \mathbf{j}_1 + z_1 \mathbf{k}_1 \\ x_1 = -(a + x_0) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + y_0 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + a \cos \varphi_1 - z_0 \sin \varphi_1 \\ y_1 = -(a + x_0) \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + y_0 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + a \sin \varphi_1 + z_0 \cos \varphi_1 \\ z_1 = (a + x_0) \sin \varphi_2 + y_0 \cos \varphi_2 \\ \mathbf{r}_0 = x_0 \mathbf{i}_0 + y_0 \mathbf{j}_0 + z_0 \mathbf{k}_0 \\ u = B_4/B_5 \\ \varphi_2 = i_{21} \varphi_1, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi \end{cases} \quad (22)$$

式中,  $\mathbf{i}_1$ 、 $\mathbf{j}_1$ 、 $\mathbf{k}_1$  分别为坐标系  $\Sigma_1$  中3个坐标轴方向的底矢。

### 1.4.4 啮合面方程

蜗杆副的啮合面方程为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_2 = \mathbf{M}_{20} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{r}_0 = x_0 \mathbf{i}_0 + y_0 \mathbf{j}_0 + z_0 \mathbf{k}_0 \\ u = B_4/B_5 \end{cases} \quad (23)$$

## 2 啮合分析主要公式

### 2.1 二界函数和二界曲线

根据二界函数的定义, 二界函数为

$$\Phi_t = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = u \cos \theta \sin \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dt} + u \sin \theta \cos \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dt} = u \cos \theta \sin \varphi_2 \omega_2 + u \sin \theta \cos \varphi_2 \omega_2 \quad (24)$$

二界点条件为

$$\begin{cases} \Phi = -u \cos \theta \cos \varphi_2 + u \sin \theta \sin \varphi_2 - ai_{21} \sin \theta = 0 \\ \Phi_t = u \cos \theta \sin \varphi_2 \omega_2 + u \sin \theta \cos \varphi_2 \omega_2 = 0 \end{cases} \quad (25)$$

### 2.2 一界函数

一界函数为

$$\psi = \Phi_t + \omega_2^{(12)} V_1^{(12)} - \omega_1^{(12)} V_2^{(12)} \quad (26)$$

一界点条件为

$$\begin{cases} \Phi = 0 \\ \psi = 0 \end{cases} \quad (27)$$

### 2.3 诱导法曲率

诱导法曲率表达式为

$$k_\sigma^{(21)} = \frac{[\omega_1^{(12)}]^2 + [\omega_2^{(12)}]^2}{\psi} \quad (28)$$

### 2.4 润滑角

传动中的润滑角计算式为

$$\mu = \arcsin \frac{V_1^{(12)} \omega_2^{(12)} - V_2^{(12)} \omega_1^{(12)}}{\sqrt{[V_1^{(12)}]^2 + [V_2^{(12)}]^2} \sqrt{[\omega_1^{(12)}]^2 + [\omega_2^{(12)}]^2}} \quad (29)$$

### 2.5 相对卷吸速度

蜗杆和蜗轮齿面的速度和可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{(12\Sigma)} = v_{2x}^{(12\Sigma)} \mathbf{i}_2 + v_{2y}^{(12\Sigma)} \mathbf{j}_2 + v_{2z}^{(12\Sigma)} \mathbf{k}_2 \\ v_{2x}^{(12\Sigma)} = y_2 i_{21} + z_2 \cos \varphi_2 \\ v_{2y}^{(12\Sigma)} = -x_2 i_{21} - z_2 \sin \varphi_2 \\ v_{2z}^{(12\Sigma)} = -x_2 \cos \varphi_2 + y_2 \sin \varphi_2 + a \end{cases} \quad (30)$$

相对卷吸速度的表达式为

$$v_{jx} = \frac{v_{2x}^{(12\Sigma)} \omega_1^{(12)}}{2 \sqrt{[\omega_1^{(12)}]^2 + [\omega_2^{(12)}]^2}} \quad (31)$$

式中,  $v_{2x}^{(12\Sigma)}$ 、 $v_{2y}^{(12\Sigma)}$ 、 $v_{2z}^{(12\Sigma)}$  分别为蜗杆和蜗轮齿面的啮合点速度和在3个坐标轴方向上的分量。

## 3 传动副啮合性能分析

### 3.1 蜗杆传动参数对接触线分布影响

#### 3.1.1 滚柱半径 $R$ 对接触线分布的影响

改变滚柱半径  $R$ , 其他几何参数不变, 以中心距  $a=75$  mm、蜗杆头数  $Z_1=1$ 、蜗轮齿数  $Z_2=20$ 、传动比  $i_{12}=20/1$ 、喉径系数  $k_1=0.16$  为例, 滚柱半径  $R$  的取值范围为5~11 mm, 分析其对接触线分布的影响。

图6所示为滚柱半径  $R$  取不同值时蜗轮齿面的接触线分布情况。由图6可知, 随着滚柱半径值的增大, 蜗轮齿面接触区域整体右移, 接触线分布越来越均匀, 接触区域增大。

#### 3.1.2 喉径系数 $k_1$ 对接触线分布的影响

改变喉径系数  $k_1$ , 其他几何参数不变, 以中心距  $a=75$  mm、蜗杆头数  $Z_1=1$ 、蜗轮齿数  $Z_2=20$ 、传动比  $i_{12}=20/1$ 、滚柱半径  $R=7$  mm 为例, 选取喉径系数  $k_1$  值分别为0.16、0.25、0.35、0.45, 分析其对接触线分布的影响。

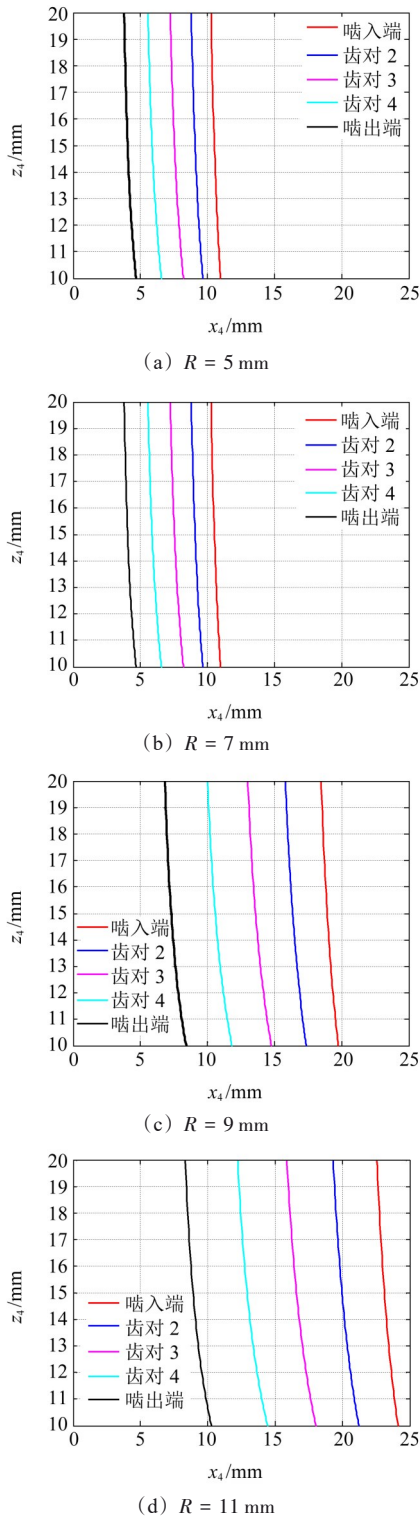


图6 R对接触线分布的影响

图7所示为喉径系数 $k_1$ 取不同值时蜗轮齿面的接触线分布情况。从图7可以看出，随着喉径系数 $k_1$ 值的增大，蜗轮齿面接触区域变化不明显，说明喉径系数 $k_1$ 对接触线分布的影响较小。

### 3.1.3 中心距 $a$ 对接触线分布的影响

改变中心距 $a$ ，其他几何参数不变，以蜗杆头数 $Z_1=1$ 、蜗轮齿数 $Z_2=20$ 、传动比 $i_{12}=20/1$ 、滚柱半径

$R=7\text{ mm}$ 、喉径系数 $k_1=0.16$ 为例，选取中心距 $a$ 的值分别为50、75、90、110 mm，分析其对接触线分布的影响。

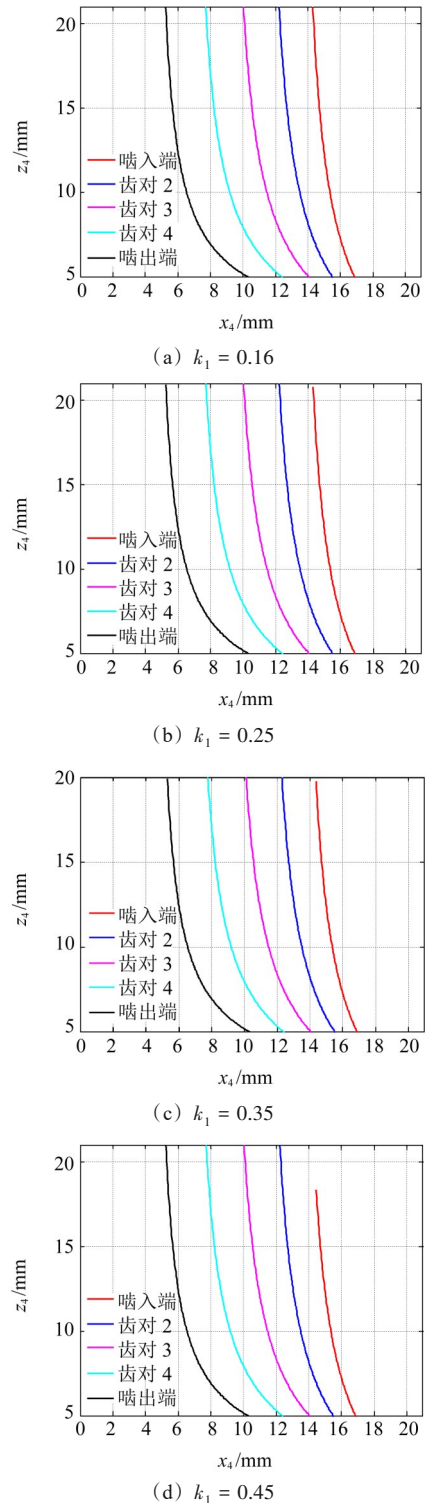


图7  $k_1$ 对接触线分布的影响

Fig. 7 Influence of  $k_1$  on the distribution of contact line

图8所示为中心距 $a$ 取不同值时蜗轮齿面的接触线分布情况。从图8可以看出，蜗轮齿面接触区域随着中心距 $a$ 值的增大整体右移，接触线分布更紧凑，接触区域缩小。

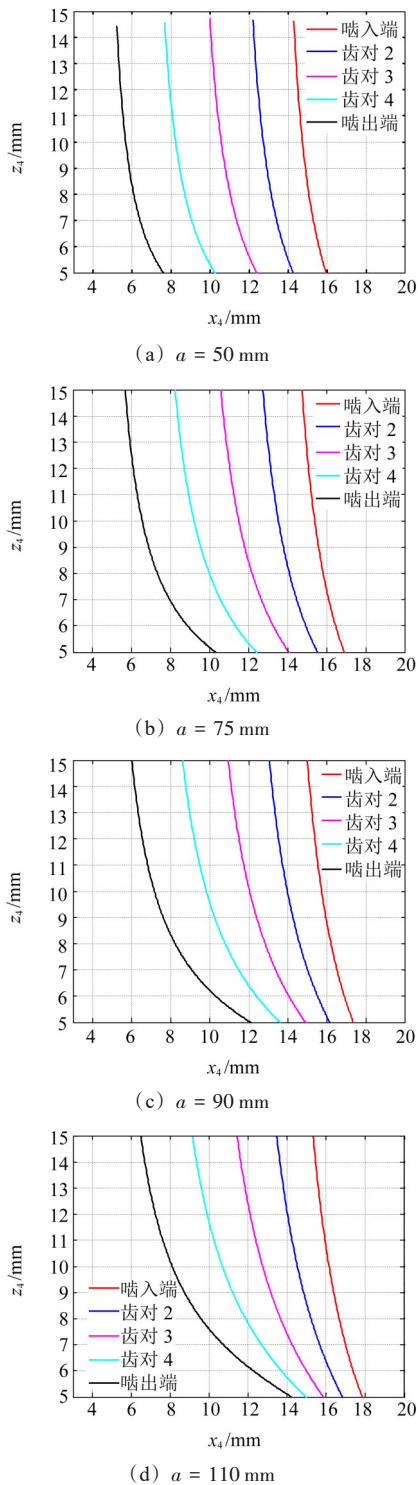


图8  $a$ 对接触线分布的影响

Fig. 8 Influence of  $a$  on the distribution of contact line

3.1.4 蜗轮齿数  $Z_2$ 对接触线分布的影响

改变蜗轮齿数  $Z_2$ , 其他几何参数不变, 以中心距  $a=75 \text{ mm}$ 、蜗杆头数  $Z_1=1$ 、滚柱半径  $R=7 \text{ mm}$ 、喉径系数  $k_1=0.16$  为例, 选取蜗轮齿数  $Z_2$  的值分别为 20、25、30、35, 分析其对接触线分布的影响。

图9所示为蜗轮齿数  $Z_2$ 取不同值时蜗轮齿面的接触线分布情况。从图9可以看出, 随着蜗轮齿数  $Z_2$  的增大, 蜗轮齿面接触线逐渐变短, 接触区域减小。

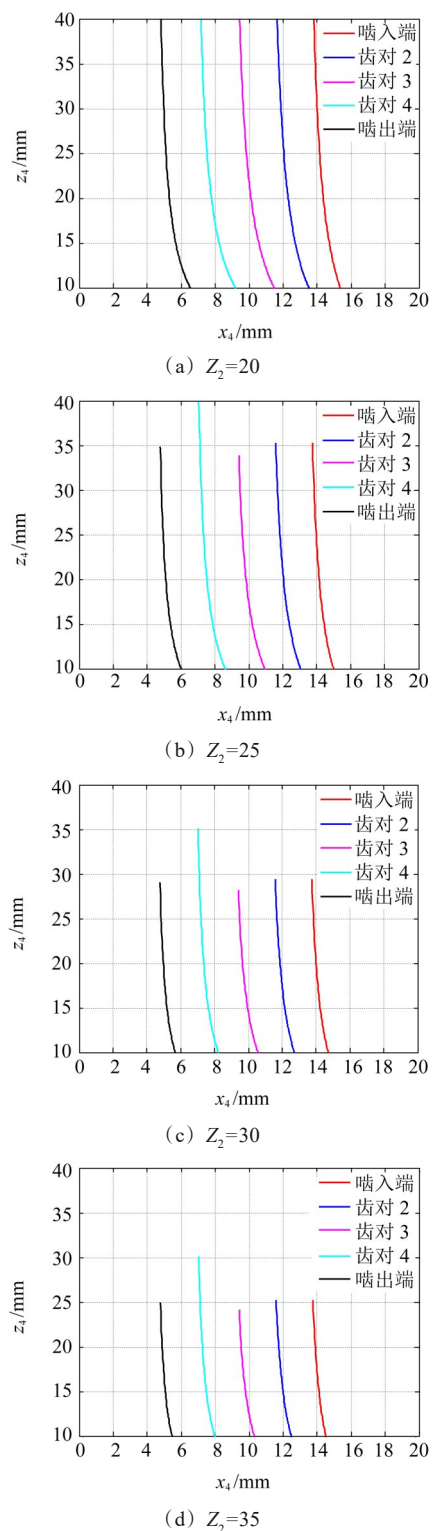


图9  $Z_2$ 对接触线分布的影响

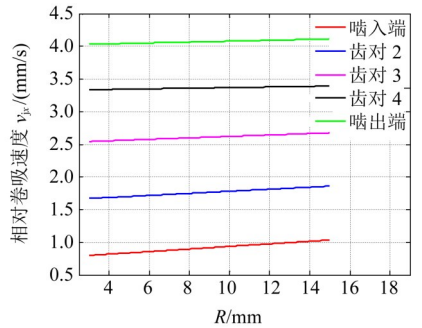
Fig. 9 Influence of  $Z_2$  on the distribution of contact line

3.2 滚柱半径  $R$ 对啮合性能的影响

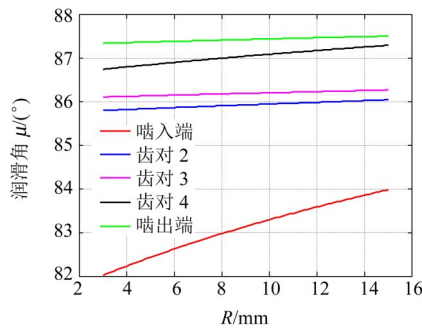
以一组几何参数为例, 分析滚柱半径  $R$ 对蜗杆传动的诱导法曲率、润滑角、相对卷吸速度的影响。设置参数为: 中心距  $a=75 \text{ mm}$ , 蜗杆齿数  $Z_1=1$ , 蜗轮齿数  $Z_2=20$ , 传动比  $i_{12}=20/1$ , 喉径系数  $k_1=0.16$ , 滚柱半径  $R$ 取值范围为  $5\sim 11 \text{ mm}$ 。

图10(a)~图10(c)所示分别为滚柱半径  $R$ 取  $5\sim$

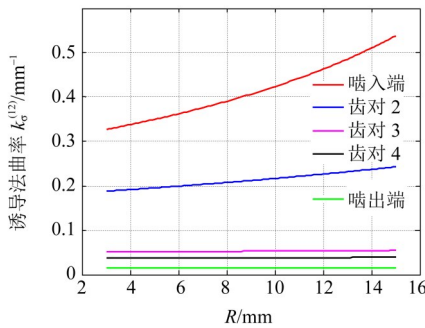
11 mm时蜗杆齿面的相对卷吸速度、润滑角、诱导法曲率,表示瞬时接触线上为均值时的啮合性能状态。



(a)  $R$ 对相对卷吸速度的影响



(b)  $R$ 对润滑角的影响



(c)  $R$ 对诱导法曲率的影响

图10 滚柱半径  $R$ 对啮合性能的影响

Fig. 10 Influence of roller radius  $R$  on meshing performance

从图10(a)可以看出,滚柱半径增大,相对卷吸速度也增大。滚柱半径  $R$ 从5 mm增大至11 mm,相对卷吸速度在啞入端增加  $0.2364 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ ,在齿对2增加  $0.189 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ ,在齿对3增加  $0.131 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ ,在齿对4增加  $0.055 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ ,啞出端的相对卷吸速度增大  $0.08 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ 。

从图10(b)可以看出,滚柱半径增大,润滑角微弱增加。 $R$ 从5 mm增大至11 mm,啞入端的润滑角增加了  $1.94^\circ$ ,齿对2的润滑角增加了  $0.25^\circ$ ,齿对3的润滑角增加了  $0.16^\circ$ ,齿对4的润滑角增加了  $0.54^\circ$ ,啞出端的润滑角增加了  $0.17^\circ$ 。润滑角最小为  $82^\circ$ ,说明该传动副润滑性能良好。

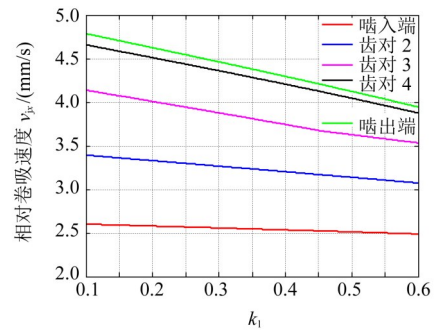
从图10(c)可以看出,随着滚柱半径的增大,啞入端诱导法曲率增加明显,齿对2逐渐增加,齿对3、齿对4和啞出端变化不大。滚柱半径从5 mm增大

至11 mm,诱导法曲率在啞入端增加了  $0.2112 \text{ mm}^{-1}$ ,齿对2的诱导法曲率增加了  $0.0546 \text{ mm}^{-1}$ ,齿对3的诱导法曲率增加了  $0.00331 \text{ mm}^{-1}$ ,齿对4的诱导法曲率增加了  $0.00172 \text{ mm}^{-1}$ ,诱导法曲率在啞出端增加了  $0.00025 \text{ mm}^{-1}$ 。诱导法曲率最大出现在滚柱半径为11 mm时,啞入端为  $0.53 \text{ mm}^{-1}$ ,齿对2的诱导法曲率在  $0.2 \text{ mm}^{-1}$ 上下,齿对3、齿对4和啞出端的诱导法曲率都在  $0.1 \text{ mm}^{-1}$ 以下,说明该传动的两共轭曲面沿该方向贴合性好。

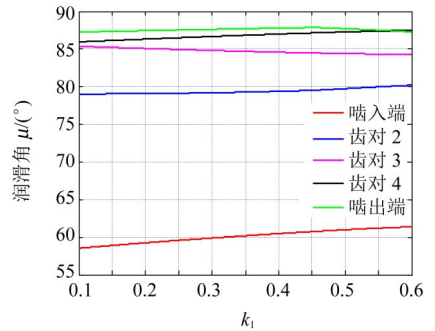
### 3.3 喉径系数 $k_1$ 对啮合性能的影响

以一组几何参数为例,分析喉径系数  $k_1$ 对蜗杆传动中诱导法曲率、润滑角、相对卷吸速度的影响。设置参数为:  $a=75 \text{ mm}$ ,  $R=7 \text{ mm}$ ,  $Z_1=1$ ,  $Z_2=20$ ,传动比  $i_{12}=20/1$ 。喉径系数  $k_1$ 取值范围为  $0.1\sim 0.6$ 。

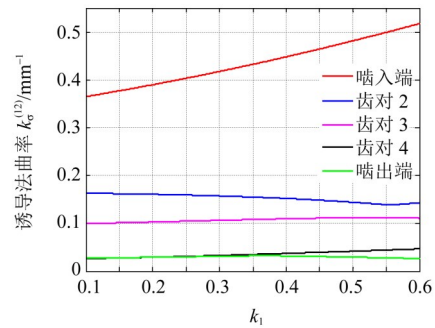
图11(a)~图11(c)所示分别为喉径系数  $k_1$ 取  $0.1\sim 0.6$ 时蜗杆齿面的相对卷吸速度、润滑角、诱导法曲率的啮合性能状态。



(a)  $k_1$ 对相对卷吸速度的影响



(b)  $k_1$ 对润滑角的影响



(c)  $k_1$ 对诱导法曲率的影响

图11 喉径系数  $k_1$ 对啮合性能的影响

Fig. 11 Influence of diametral quotient  $k_1$  on meshing performance

从图11(a)可以看出,随着喉径系数增加,总体来看相对卷吸速度逐渐减小。啮入端随着喉径系数的增加,减小得较为缓慢;齿对2、齿对3、齿对4和啮出端随着喉径系数的增加,减小得逐渐明显。喉径系数从0.1增大到0.6,啮入端相对卷吸速度减小0.112 mm/s,齿对2相对卷吸速度减小0.319 mm/s,齿对3相对卷吸速度减小0.6 mm/s,齿对4相对卷吸速度减小0.779 mm/s,啮出端卷吸速度减小0.838 mm/s。

从图11(b)可以看出,随着喉径系数增加,润滑角变化不大。喉径系数从0.1增大到0.6,啮入端润滑角增大2.85°,齿对2润滑角增大1.15°,齿对3润滑角减小1.05°,齿对4润滑角增大1.52°,啮出端润滑角不变。啮出端润滑角最小为58.58°,齿对2润滑角在80°上下,齿对3、齿对4和啮出端的润滑角在85°以上。

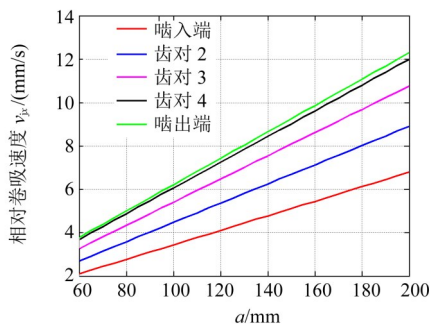
从图11(c)可以看出,随着喉径系数增加,啮入端的诱导法曲率增加明显,齿对2、齿对3、齿对4、啮出端变化不明显。喉径系数从0.1增大到0.6,啮入端诱导法曲率增大0.152 mm<sup>-1</sup>,齿对2诱导法曲率减小0.027 5 mm<sup>-1</sup>,齿对3诱导法曲率减小0.001 67 mm<sup>-1</sup>,齿对4诱导法曲率增大0.000 86 mm<sup>-1</sup>,啮出端诱导法曲率增大0.000 125 mm<sup>-1</sup>。

### 3.4 中心距a对啮合性能的影响

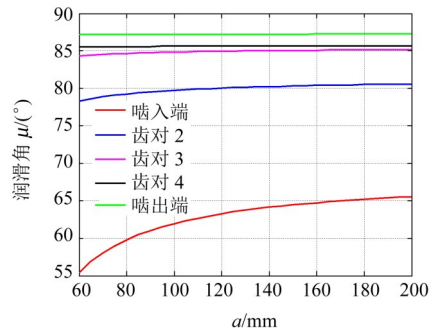
以一组几何参数为例,分析中心距a对蜗杆传动的诱导法曲率、润滑角、相对卷吸速度的影响。设置参数为:R=7 mm, Z<sub>1</sub>=1, Z<sub>2</sub>=20, k<sub>1</sub>=0.16, 传动比i<sub>12</sub>=20/1。中心距a在60~200 mm。

图12(a)~图12(c)所示分别为中心距a取60~200 mm时蜗杆齿面的相对卷吸速度、润滑角、诱导法曲率的啮合性能状态。

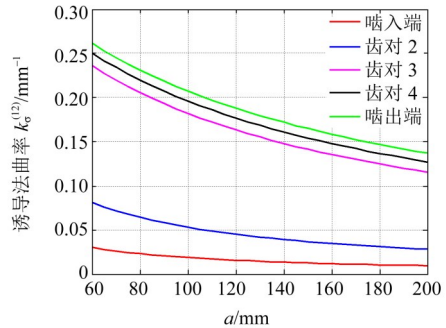
从图12(a)可以看出,随着中心距a增加,相对卷吸速度增加明显。中心距从60 mm增大到200 mm,啮入端相对卷吸速度增加4.691 mm/s,齿对2相对卷吸速度增加6.202 mm/s,齿对3相对卷吸速度增加7.222 mm/s,齿对4相对卷吸速度增加8.203 mm/s,啮出端相对卷吸速度增加8.513 mm/s。



(a) 中心距a对相对卷吸速度的影响



(b) 中心距a对润滑角的影响



(c) 中心距a对诱导法曲率的影响

图12 中心距a对啮合性能的影响

Fig. 12 Influence of center distance a on meshing performance

从图12(b)可以看出,随着中心距a增加,润滑角的变化不明显。中心距从60 mm增大到200 mm,啮入端润滑角增加10.13°,齿对2润滑角增加2.28°,齿对3润滑角增加0.82°,齿对4润滑角增加0.15°,啮出端润滑角增加0.1°。

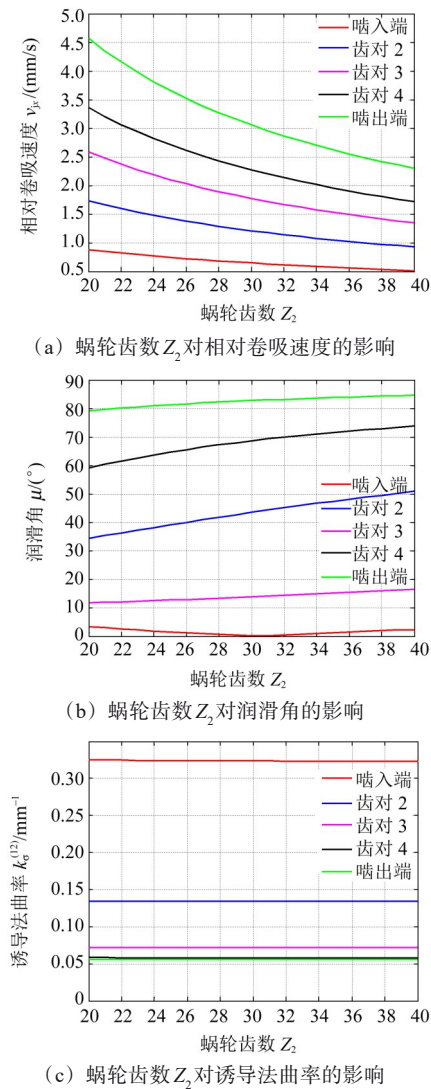
从图12(c)可以看出,随着中心距a增加,诱导法曲率逐渐减小。中心距从60 mm增大到200 mm,啮入端诱导法曲率减小0.020 508 mm<sup>-1</sup>,齿对2诱导法曲率减小0.053 244 mm<sup>-1</sup>,齿对3诱导法曲率降低0.120 9 mm<sup>-1</sup>,齿对4诱导法曲率减小0.123 3 mm<sup>-1</sup>,啮出端诱导法曲率降低0.124 56 mm<sup>-1</sup>。

### 3.5 蜗轮齿数Z<sub>2</sub>对啮合性能的影响

以一组几何参数为例,分析蜗轮齿数Z<sub>2</sub>变化对无侧隙端面滚子包络蜗杆传动的诱导法曲率、润滑角、相对卷吸速度的影响。设置参数为:中心距a=75 mm, R=7 mm, Z<sub>1</sub>=1, k<sub>1</sub>=0.6。选取蜗轮齿数Z<sub>2</sub>的范围为20~40,分析蜗杆副的啮合性能。

图13(a)~图13(c)所示分别为蜗轮齿数Z<sub>2</sub>取20~40时蜗杆齿面的相对卷吸速度、润滑角、诱导法曲率的啮合性能状态。

从图13(a)可以看出,随着蜗轮齿数Z<sub>2</sub>增加,相对卷吸速度逐渐减小。蜗轮齿数Z<sub>2</sub>从20增大到40,啮入端相对卷吸速度减小0.370 5 mm/s,齿对2相对卷吸速度减小0.806 4 mm/s,齿对3相对卷吸速度减小1.243 mm/s,齿对4相对卷吸速度减小1.636 mm/s,啮出端相对卷吸速度减小2.272 mm/s。

图 13 蜗轮齿数  $Z_2$  对啮合性能的影响Fig. 13 Influence of worm gear tooth number  $Z_2$  on meshing performance

从图 13(b)可以看出, 蜗轮齿数  $Z_2$  从 20 增大到 40, 啮入端润滑角减小  $1.012^\circ$ , 齿对 2 润滑角增加  $4.76^\circ$ , 齿对 3 润滑角增加  $16.45^\circ$ , 齿对 4 润滑角增加  $14.74^\circ$ , 啮出端润滑角增加  $5.45^\circ$ 。

从图 13(c)可以看出, 随着蜗轮齿数  $Z_2$  增加, 诱导法曲率变化不大。蜗轮齿数  $Z_2$  从 20 增大到 40, 啮入端诱导法曲率减小  $0.002 \text{ mm}^{-1}$ , 齿对 2 诱导法曲率增加  $0.0001 \text{ mm}^{-1}$ , 齿对 3 诱导法曲率没有变化, 齿对 4 诱导法曲率减小  $0.0023 \text{ mm}^{-1}$ , 啮出端诱导法曲率没有变化。

#### 4 结论

提出一种无侧隙端面滚子包络蜗杆传动, 蜗轮轮齿为滚子, 且滚子轴线与蜗轮轴线平行, 与传统蜗轮相比, 径向结构更紧凑。对其数学模型、啮合几何学和啮合性能等展开理论研究和分析。得出以下主要结论:

1) 通过坐标变换等构建了啮合方程、接触线方程和齿面方程, 推导了其诱导法曲率、润滑角、相对卷吸速度等啮合性能数学表达式。

2) 随着滚柱半径  $R$  的增加, 相对卷吸速度增加, 润滑角增大, 主要啮合齿对的诱导法曲率在  $0.2 \text{ mm}^{-1}$  左右; 随着喉径系数  $k_t$  逐渐增大, 相对卷吸速度降低, 主要啮合齿对的润滑角在  $85^\circ$  左右, 主要啮合齿对的诱导法曲率小于  $0.2 \text{ mm}^{-1}$ ; 随着中心距  $a$  的增加, 相对卷吸速度明显增加, 主要啮合齿对的润滑角在  $80^\circ \sim 87^\circ$ , 诱导法曲率明显减小, 均小于  $0.25 \text{ mm}^{-1}$ ; 随着蜗轮齿数  $Z_2$  的增加, 相对卷吸速度减小, 润滑角增加, 诱导法曲率基本不变, 其主要啮合齿对的诱导法曲率均低于  $0.15 \text{ mm}^{-1}$ 。

3) 传动副同时啮合齿对数达 5 对, 接触线分布均匀, 无侧隙端面滚子包络蜗杆传动副啮合性能良好。

#### 参 考 文 献

- [1] DOU C Y, CHEN Y H, LIU F, et al. Meshing performance investigations on a novel end-face roller enveloping cylindrical worm drive with non-backlash [J]. Mechanism and Machine Theory, 2023, 182: 105235.
- [2] 王进戈, 邓星桥, 张均富, 等. 误差对无侧隙双滚子包络环面蜗杆传动啮合性能的影响研究 [J]. 西华大学学报 (自然科学版), 2010, 29(2): 1-6.  
WANG Jinge, DENG Xingqiao, ZHANG Junfu, et al. Study on the influence of errors on the meshing performance of a new kind of double-roller enveloping hourglass worm gearing [J]. Journal of Xihua University (Natural Science Edition), 2010, 29(2): 1-6.
- [3] 刘新华, 张均富, 王进戈. 无侧隙双滚子包络环面蜗杆传动的运动仿真 [J]. 机械设计与研究, 2010, 26(3): 49-52.  
LIU Xinhua, ZHANG Junfu, WANG Jinge. Kinematical simulation of the non-backlash double-roller enveloping hourglass worm drive [J]. Machine Design and Research, 2010, 26(3): 49-52.
- [4] 洪雷, 王进戈, 张均富, 等. 无侧隙双滚子包络环面蜗杆传动的啮合分析 [J]. 西华大学学报 (自然科学版), 2008, 27(3): 18-23.  
HONG Lei, WANG Jinge, ZHANG Junfu, et al. Meshing analysis of non-backlash double roller enveloping hourglass worm gearing [J]. Journal of Xihua University (Natural Science Edition), 2008, 27(3): 18-23.
- [5] 王进戈, 张均富, 邓星桥, 等. 无侧隙双滚子包络环面蜗杆传动的参数优化 [J]. 机械工程学报, 2010, 46(21): 6-12.  
WANG Jinge, ZHANG Junfu, DENG Xingqiao, et al. Parameter optimization of the non-backlash double-roller enveloping hourglass worm gearing [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(21): 6-12.
- [6] 田东亮, 向中凡, 尹玉梅, 等. 基于 UG 的无侧隙双滚子包络环面蜗杆参数化建模 [J]. 机械设计与制造, 2010(12): 74-76.  
TIAN Dongliang, XIANG Zhongfan, YIN Yumei, et al. Parametric modeling of non-backlash double roller enveloping hourglass worm based on UG [J]. Machinery Design & Manufacture, 2010 (12): 74-76.

- [7] 邓星桥,王进戈,张均富,等. 无侧隙双滚子包络环面蜗杆真实啮合齿面的理论研究[J]. 西南交通大学学报,2010,45(2):222-226.  
DENG Xingqiao, WANG Jinge, ZHANG Junfu, et al. Theoretical study on real tooth surface of non-backlash double-roller enveloping hourglass worm[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2010,45(2):222-226.
- [8] 邓星桥,王进戈,张均富,等. 基于遗传算法的无侧隙双滚子包络环面蜗杆传动的参数优化设计[J]. 四川大学学报(工程科学版),2010,42(2):250-254.  
DENG Xingqiao, WANG Jinge, ZHANG Junfu, et al. Optimization design of the non-backlash double-roller enveloping hourglass worm's parameters based on genetic algorithm[J]. Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition), 2010, 42(2):250-254.
- [9] 李阳,仲梁维,李海渊,等. 无侧隙双滚子包络环面蜗杆快速变型设计研究[J]. 包装工程,2013,34(1):60-64.  
LI Yang, ZHONG Liangwei, LI Haiyuan, et al. Research on rapid variant design of non-backlash double roller enveloping hourglass worm[J]. Packaging Engineering, 2013,34(1):60-64.
- [10] 李阳,仲梁维,李海渊,等. 无侧隙双滚子包络环面蜗杆快速设计系统[J]. 中国机械工程,2013,24(17):2273-2279.  
LI Yang, ZHONG Liangwei, LI Haiyuan, et al. Rapid design system of non-backlash double-roller enveloping hourglass worm[J]. China Mechanical Engineering, 2013,24(17):2273-2279.
- [11] 廖鸿辉,汪旭东,祁岩,等. 并列倾斜式双滚子包络环面蜗杆传动啮合理论分析[J]. 机械传动,2021,45(8):29-37.  
LIAO Honghui, WANG Xudong, QI Yan, et al. Meshing theory analysis of parallel inclined double roller enveloping hourglass worm drive[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2021, 45(8):29-37.
- [12] 柳在鑫,唐豪,杨龙祥. 基于空间啮合理论的倾斜式双滚子包络环面蜗杆实体建模[J]. 西华大学学报(自然科学版),2013,32(4):53-57.  
LIU Zaixin, TANG Hao, YANG Longxiang. Solid modeling of non-parallel double-roller enveloping hourglass worm based on space engagement theory[J]. Journal of Xihua University (Natural Science Edition), 2013,32(4):53-57.
- [13] 柳在鑫,王进戈,张均富,等. 交错轴双滚子包络环面蜗杆传动啮合分析[J]. 四川大学学报(工程科学版),2012,44(4):221-225.  
LIU Zaixin, WANG Jinge, ZHANG Junfu, et al. Meshing analysis of non-parallel double-roller enveloping hourglass worm gearing[J]. Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition), 2012,44(4):221-225.
- [14] 柳在鑫,李金宽,朱焱,等. 倾斜式双滚子包络环面蜗杆传动加工及性能测试[J]. 机械传动,2018,42(8):116-120.  
LIU Zaixin, LI Jinkuan, ZHU Yan, et al. Machining and performance testing of inclined double-roller enveloping hourglass worm drive[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2018,42(8):116-120.
- [15] 欧玥,李金宽,朱焱,等. 倾斜式双滚子包络环面蜗杆传动热弹流润滑分析[J]. 机械传动,2018,42(7):33-37.  
OU Yue, LI Jinkuan, ZHU Yan, et al. Analysis of thermal elastohydrodynamic lubrication of inclined double-roller enveloping hourglass worm drive[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2018, 42(7):33-37.
- [16] 柳在鑫,王进戈,张均富,等. 倾斜式双滚子包络环面蜗杆副承载能力研究[J]. 高技术通讯,2013,23(5):491-496.  
LIU Zaixin, WANG Jinge, ZHANG Junfu, et al. Research on the load carrying capacity of inclined double-roller enveloping hourglass worm gears[J]. Chinese High Technology Letters, 2013,23(5):491-496.
- [17] 李金宽,柳在鑫,张翠. 倾斜式双圆柱滚子包络环面蜗杆传动的等温弹流润滑分析[J]. 西安交通大学学报,2017,51(5):88-94.  
LI Jinkuan, LIU Zaixin, ZHANG Cui. Analysis on isothermal elastohydrodynamic lubrication performance of inclined double-roller enveloping hourglass worm drive[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2017,51(5):88-94.
- [18] 王凯,付敏,王珏翎. 滚子包络端面啮合蜗杆传动的啮合性能分析[J]. 西安交通大学学报,2019,53(3):135-142.  
WANG Kai, FU Min, WANG Juelling. Meshing performance analysis on the worm drive in roller enveloping end face engagement[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2019,53(3):135-142.
- [19] 王凯,王珏翎,王丽玮. 滚子包络端面啮合蜗杆传动接触有限元分析[J]. 机械传动,2018,42(10):117-123.  
WANG Kai, WANG Juelling, WANG Liwei. Finite element contact analysis of the roller enveloping end face engagement worm drive[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2018,42(10):117-123.
- [20] 王凯,王进戈,邓星桥,等. 滚子包络端面啮合蜗杆传动啮合理论分析[J]. 机械设计与研究,2018,34(5):88-91.  
WANG Kai, WANG Jinge, DENG Xingqiao, et al. Study on meshing theory of the roller enveloping end face engagement worm drive[J]. Machine Design & Research, 2018,34(5):88-91.
- [21] 王凯. 滚子包络端面啮合蜗杆副加工专用设备研制与试制研究[J]. 机械传动,2020,44(8):153-160.  
WANG Kai. Research of the special processing equipment development and trial production of roller enveloping end face engagement worm pair[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2020,44(8):153-160.
- [22] 陈燕,殷国富,陈永洪. 变齿厚渐开线齿轮包络环面蜗杆传动啮合性能分析[J]. 中国机械工程,2019,30(23):2798-2808.  
CHEN Yan, YIN Guofu, CHEN Yonghong. Meshing performance analyses of variable tooth thickness involute gear enveloping hourglass worm drives[J]. China Mechanical Engineering, 2019, 30(23):2798-2808.
- [23] 任雯,李杰,王天羽,等. 点接触共轭渐开线蜗杆副啮合理论及性能分析[J]. 北京航空航天大学学报,2024,50(10):3183-3195.  
REN Wen, LI Jie, WANG Tianyu, et al. Meshing theory and performance analysis of point-contact conjugate involute worm gear pair[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2024,50(10):3183-3195.
- [24] YE X X, CHEN Y H, LU B B, et al. Study on a novel backlash-adjustable worm drive via the involute helical beveloid gear meshing with dual-lead involute cylindrical worm[J]. Mechanism and Machine Theory, 2022,167:104466.
- [25] 王进戈. 滚锥包络环面蜗杆传动[M]. 成都:四川科学技术出版社,2000:25-33.  
WANG Jinge. Rolling cone enveloping hourglass worm drive[M]. Chengdu: Sichuan Science and Technology Press, 2000:25-33.