

等角螺旋线齿廓面齿轮啮合特性与应力分析

丁帅强¹ 蔡志钦^{1,2} 姚斌¹ 许水电^{1,3} 李志胜⁴

(1. 厦门大学 航空航天学院, 厦门 361102)

(2. 重庆大学 高端装备机械传动全国重点实验室, 重庆 400044)

[3. 传孚科技(厦门)有限公司, 厦门 361102]

(4. 中国机械总院集团郑州机械研究所有限公司, 郑州 450001)

摘要:【目的】随着工业领域对面齿轮传动系统承载能力与使用寿命的要求不断提高, 为进一步增强面齿轮传动的承载性能, 提出一种基于等角螺旋线齿廓的面齿轮副传动设计方法。【方法】研究了等角螺旋线面齿轮齿面形成原理; 通过求解啮入点、啮出点、内齿廓齿顶点和外齿廓齿根点的啮合参数, 推导了等角螺旋线面齿轮齿面离散模型; 利用数值计算实例验证了齿面模型的正确性; 分析了等角螺旋线面齿轮的主曲率、滑动率与压力角等关键特征参数, 证明通过圆柱齿轮齿廓共轭的面齿轮齿廓仍为等角螺旋线; 推导面齿轮接触应力与弯曲应力的理论解析模型, 通过仿真验证了理论模型的准确性。【结果】仿真结果表明, 等角螺旋线面齿轮应力明显小于渐开线面齿轮; 等角螺旋线面齿轮承载能力显著高于渐开线面齿轮。研究为面齿轮传动的承载能力提升提供了一种新的设计思路。

关键词: 等角螺旋线; 面齿轮; 线接触; 承载能力

中图分类号: TH114 **DOI:** 10.16578/j.issn.1004.2539.2026.03.014

0 引言

面齿轮传动是一种用于相交轴间运动传递的高性能齿轮传动形式, 具有结构简单、转矩分流、承载能力高、重合度大等显著优势, 已在直升机主减速器系统中得到成功应用。随着对面齿轮传动系统承载能力和使用寿命要求的持续提升, 面齿轮承载能力的提升面临着更高的挑战。

等角螺旋线具有独特的数学特性并在自然界中普遍存在, 吸引了众多学者的深入研究。等角螺旋线已在锥齿轮^[1]和齿廓减速器^[2]中得到应用, 凸显出载荷方向恒定、齿面接近纯滚动、传动误差小等显著优点。研究表明, 相较于采用传统渐开线齿廓的圆柱齿轮, 将等角螺旋线应用于圆柱齿轮齿廓^[3]的齿轮在传动效率的提升、摩擦磨损的优化以及承载能力的增强等方面, 均体现出更优的综合性能。研究等角螺旋线在各类齿轮上的应用具有巨大潜力。

面齿轮的接触应力和弯曲应力决定面齿轮的承载能力。在面齿轮应力分析领域, 目前主要采用的方法有理论解析法、有限元仿真法和试验测量法。HOCHREIN等^[4]针对螺旋角与中心偏移存在不同组合的共轭面齿轮传动, 提出两种接触应力计算方法: 其一, 通过整体网格划分确定拓扑接触应力; 其二, 先定义等效圆柱对, 再依据ISO 6336标准计算接触应力。SARIBAY等^[5-7]基于有限元法对面齿轮在1个啮合周期内的接触应力和弯曲应力进行深入研究, 并与标准应力公式计算结果进行对比, 验证了有限元分析法的可行性。PATIL等^[8-9]通过齿轮动应力试验台测量齿轮接触应力, 并将仿真与试验结果进行了对比分析。LITVIN等^[10-11]对比分析了渐开线齿廓和小齿轮齿廓修形这两种齿廓共轭的面齿轮接触应力, 得出修形齿廓面齿轮接触应力更小的结论。ZHOU等^[12-15]通过有限元仿真法分析正交面齿轮在载

收稿日期: 2024-12-03

基金项目: 国家自然科学基金项目(52475070); 高端装备机械传动全国重点实验室开放基金项目(SKLM-T-MSKFKT-202308); 航空科学基金项目(2024M063068001); 福建省自然科学基金计划项目(2023J01048)

作者简介: 丁帅强, 男, 2000年生, 江西上饶人, 硕士研究生; 主要研究方向为面齿轮齿廓设计及强度分析; 1989242195@qq.com。

蔡志钦(通信作者), 男, 1988年生, 福建漳州人, 助理教授, 硕士研究生导师; 主要研究方向为高性能齿轮传动; caizhiqin@xmu.edu.cn。

引用格式: 丁帅强, 蔡志钦, 姚斌, 等. 等角螺旋线齿廓面齿轮啮合特性与应力分析[J]. 机械传动, 2026, 50(3): 120-131.

DING Shuaiqiang, CAI Zhiqin, YAO Bin, et al. Meshing characteristics and stress analysis of equiangular spiral profile face gears[J].

Journal of Mechanical Transmission, 2026, 50(3): 120-131.



免费获取

荷作用下的齿根弯曲应力, 并通过正交试验拟合出面齿轮齿根弯曲应力计算式。秦德润等^[16-19]通过有限元仿真法探讨正交与非正交面齿轮在加载条件下齿面接触应力和齿根弯曲应力的变化规律, 并与锥齿轮弯曲强度计算标准和赫兹接触计算公式的结果进行了对比。方宗德等^[20-22]在齿面接触分析和承载接触分析的基础上, 使用弹性理论计算弧线齿面齿轮的齿面接触应力, 并采用有限元应力影响矩阵法计算了面齿轮齿根弯曲应力。王延忠等^[23-24]根据加载接触分析原理求解正交直齿面齿轮的接触应力, 并通过有限元法验证了该计算方法的正确性。林超等^[25-27]则提出非圆端面齿轮副齿面接触应力和齿根弯曲应力的计算方法和试验方法。

面齿轮的应力仿真与理论计算已日趋成熟, 为面齿轮承载能力设计提供了坚实的理论基础和技术支撑。本文基于等角螺旋线的数学特性, 设计出等角螺旋线齿廓面齿轮, 旨在提高面齿轮传动的承载能力; 并通过与渐开线面齿轮承载能力的对比分析, 验证了等角螺旋线面齿轮设计方法的可行性和优越性。

1 等角螺旋线基本特征

图1为等角螺旋线示意图, 其特征是曲线上动点的运动方向与极径的夹角 β 为定值, β 为走向角(也称螺旋角)。等角螺旋线最重要的两大特性如下: ①等角螺旋线上各点的螺旋角相等, 具有等角性; ②等角螺旋线上相同夹角所对应的三角扇形区域是相似三角扇形, 具有保形性。

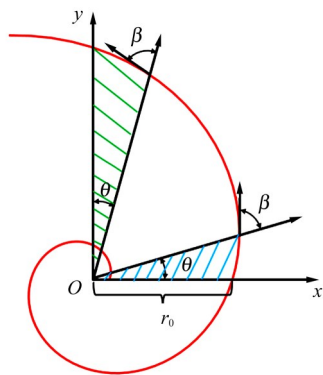


图1 等角螺旋线示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the equiangular spiral

等角螺旋线的直角坐标方程为

$$\begin{cases} x = r_0 e^{k\theta} \cos \theta \\ y = r_0 e^{k\theta} \sin \theta \end{cases} \quad (1)$$

式中, r_0 为起始极径; k 为常数, $k = \cot \beta$; θ 为极角。

2 等角螺旋线面齿轮啮合原理

2.1 面齿轮啮合坐标系

根据面齿轮啮合原理, 圆柱齿轮与面齿轮的啮合坐标系有: 与圆柱齿轮一起转动的随动坐标系 S_s ; 与面齿轮一起转动的随动坐标系 S_2 ; 与圆柱齿轮旋转中心固连的固定坐标系 S_m ; 与面齿轮旋转中心固连的固定坐标系 S_p 。各坐标系的关系如图2所示。其中, ϕ_1 为圆柱齿轮转角; ϕ_2 为面齿轮转角; ω_1 为圆柱齿轮转速; ω_2 为面齿轮转速。定义本文轴交角为 90° , 为正交直齿面齿轮副。

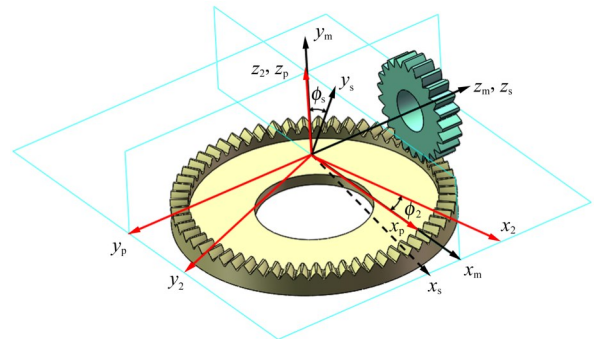


图2 面齿轮啮合坐标系

Fig. 2 Coordinate systems of the face gear meshing

2.2 面齿轮齿面方程

建立图3所示的圆柱齿轮等角螺旋线齿廓坐标系, 其中, r_a 为齿顶圆半径。通过几何推导, 获得的等角螺旋线圆柱齿轮齿面方程为

$$r_s(\mu_s, \theta_s) = \begin{bmatrix} \pm r e^{k\theta_s} \sin(\theta_s + \theta_{os}) \\ -r e^{k\theta_s} \cos(\theta_s + \theta_{os}) \\ \mu_s \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中, μ_s 为圆柱齿轮齿宽参数; θ_s 为齿廓上的展角; r 为圆柱齿轮分度圆半径; θ_{os} 为竖轴对称线到等角螺旋线起始点的角度参数, $\theta_{os} = \pi / (2N_s)$, 其决定了齿的分布, 也为了保证齿厚等于齿槽宽, N_s 为圆柱齿轮齿数。

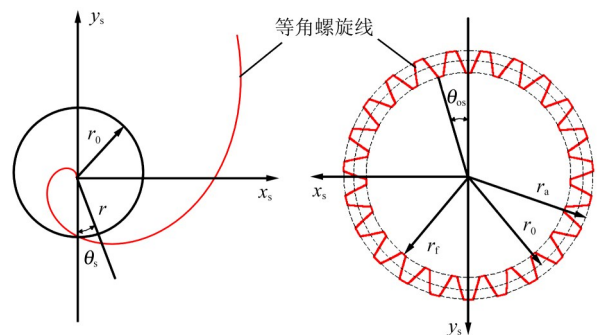


图3 圆柱齿轮等角螺旋线齿廓

Fig. 3 Equiangular spiral tooth profile of the cylindrical gear

通过圆柱齿轮齿面方程，推导出其单位法向量，即

$$\mathbf{n}_s = \begin{bmatrix} \frac{[-k \cos(\theta_s + \theta_{os}) + \sin(\theta_s + \theta_{os})]}{\sqrt{k^2 + 1}} \\ \frac{-[k \sin(\theta_s + \theta_{os}) + \cos(\theta_s + \theta_{os})]}{\sqrt{k^2 + 1}} \\ 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (3)$$

由图2可知，变换矩阵 \mathbf{M}_{2s} 的作用是实现由坐标系 S_1 到坐标系 S_2 的变换，据此可以计算得到

$$\mathbf{M}_{2s} = \begin{bmatrix} \cos \phi_2 \cos \phi_s & -\cos \phi_2 \sin \phi_s & -\sin \phi_2 & 0 \\ -\sin \phi_2 \cos \phi_s & \sin \phi_2 \sin \phi_s & -\cos \phi_2 & 0 \\ \sin \phi_s & \cos \phi_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中， $\phi_2 = \phi_s N_s / N_2 = m_{2s} \phi_s$ ， N_2 为面齿轮齿数， m_{2s} 为传动比。

面齿轮齿面方程组可表示为

$$\begin{cases} r_2(\mu_s, \theta_s, \phi_s) = \mathbf{M}_{2s}(\phi_s) r_s(\mu_s, \theta_s) \\ f(\mu_s, \theta_s, \phi_s) = \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{v}^{(s2)} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

其中，齿轮相对速度 $\mathbf{v}^{(s2)}$ 为

$$\mathbf{v}^{(s2)} = \omega_s \begin{bmatrix} -y_s - z_s m_{2s} \cos \phi_s \\ x_s + z_s m_{2s} \sin \phi_s \\ m_{2s}(x_s \cos \phi_s - y_s \sin \phi_s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (6)$$

由此可得，面齿轮啮合方程为

$$f(\mu_s, \theta_s, \phi_s) = \mu_s m_{2s} (k \cos \phi_\theta - \sin \phi_\theta) - k r e^{k\theta} \quad (7)$$

其中， $\phi_\theta = \theta_s + \theta_{os} + \phi_s$ 。

求解式(5)所示方程组，可得等角螺旋线面齿轮齿面方程，即

$$r_2(\theta_s, \phi_s) = \begin{bmatrix} r e^{k\theta_s} \left[\cos \phi_2 \sin \phi_\theta - \frac{k \sin \phi_2}{m_{2s}(k \cos \phi_\theta - \sin \phi_\theta)} \right] \\ -r e^{k\theta_s} \left[\sin \phi_2 \sin \phi_\theta + \frac{k \cos \phi_2}{m_{2s}(k \cos \phi_\theta - \sin \phi_\theta)} \right] \\ -r e^{k\theta_s} \cos \phi_\theta \end{bmatrix} \quad (8)$$

面齿轮的单位法向量为

$$\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-\cos \phi_2 (k \cos \phi_\theta - \sin \phi_\theta)}{\sqrt{k^2 + 1}} \\ \frac{\sin \phi_2 (k \cos \phi_\theta - \sin \phi_\theta)}{\sqrt{k^2 + 1}} \\ \frac{-k \sin \phi_\theta - \cos \phi_\theta}{\sqrt{k^2 + 1}} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (9)$$

由式(8)可知，通过等角螺旋线圆柱齿轮齿面方程可共轭推导出面齿轮齿面方程。从齿面方程可以看出，面齿轮齿廓曲线仍是等角螺旋线，说明等角螺旋线通过共轭求解后具有保形性。

2.3 齿面可视化

根据上述推导的面齿轮副齿面方程，定义面齿轮副基本参数，如表1所示。面齿轮为变齿厚齿轮，如果内径过小，轮齿根部会出现根切现象；外径过大，轮齿齿顶则会出现变尖现象。等角螺旋线面齿轮与渐开线面齿轮发生根切和变尖的内外半径不同，为了方便对比，定义两者的内外半径相同，且均不会出现根切和变尖现象。

表1 面齿轮副基本参数

参数	渐开线小齿轮	渐开线面齿轮	等角线小齿轮	等角线面齿轮
齿数	23	59	23	59
模数/mm	3	3	3	3
内外半径/mm		86~95		86~95
齿宽/mm	12	9	12	9
齿顶高系数	1		0.8	
顶隙系数	0.25		0.3	

计算获得等角螺旋线与渐开线面齿轮副的齿面数据点，并将齿面进行可视化，如图4所示。齿轮齿面分为工作齿面和过渡曲面，通过齿面的可视化，验证了齿面方程的正确性。

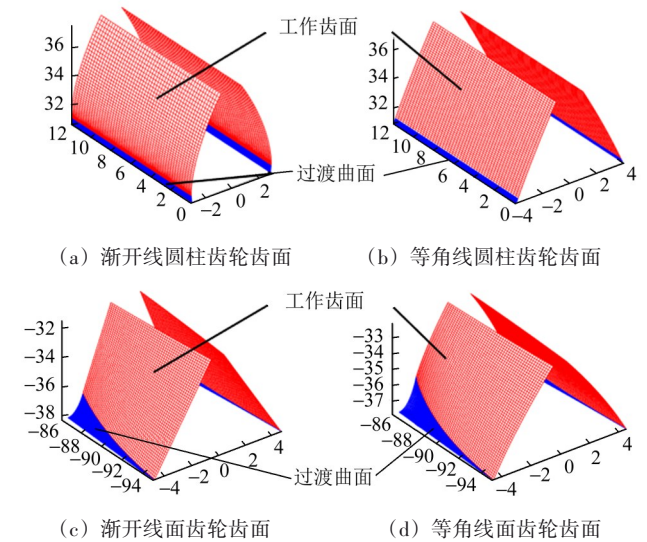


图4 面齿轮副齿面

Fig. 4 Tooth surface of the face gear pair

3 等角螺旋线面齿轮啮合特性分析

3.1 齿面啮合角求解

如图5所示，面齿轮齿面接触线为非等距斜线，齿面存在以下几个特殊啮合点：① 齿面右上角外齿廓齿顶啮入点 P_{in} ；② 齿面左下角内齿廓齿根啮出点 P_{out} ；③ 齿面左上角内齿廓齿顶点 P_{in} ；④ 齿面右下

角外齿廓齿根点 P_{hf} 。由4个特殊啮合点和齿面接触线特征可知, 面齿轮齿面可由两条接触界限线 L_α 和 L_β 离散成3个区域。

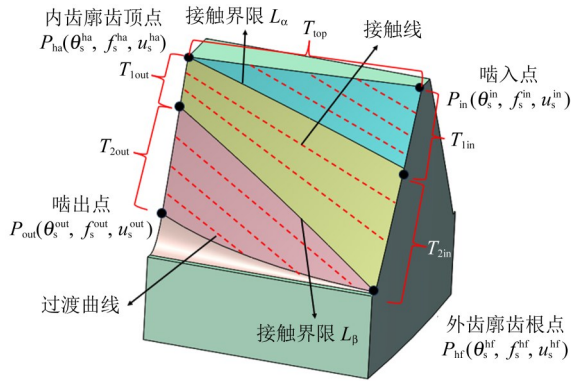


图5 面齿轮齿面离散

Fig. 5 Discrete tooth surface of the face gear

当啮合区域在接触界限线 L_α 和啮入点 P_{in} 之间且面齿轮外径已知时, 即可获得该区域不同啮合点对应的啮合角 ϕ_s 与展角 θ_s , 实现外齿廓 T_{1out} 和齿顶曲线 T_{top} 的离散化。

当啮合区域在接触界限线 L_α 和接触界限线 L_β 之间且面齿轮内外径已知时, 即可获得该区域不同啮合点对应的啮合角 ϕ_s 与展角 θ_s , 实现外齿廓 T_{2out} 和内齿廓 T_{1in} 的离散化。

当啮合区域在过渡曲线和接触界限线 L_β 之间且确定过渡曲线上的展角 θ_s 后, 即可完成过渡曲线的离散化; 若面齿轮内径已知, 即可获得该区域不同啮合点对应的啮合角 ϕ_s 与展角 θ_s , 实现内齿廓 T_{2in} 的离散化。

最后, 已知齿面离散啮合点对应的啮合角 ϕ_s 和面齿轮内外半径, 即可获得齿面离散啮合点对应的展角 θ_s , 实现面齿轮齿面接触线的离散化。

啮合角度的求解步骤如下:

1) 计算轮齿外齿廓齿顶处啮合角 ϕ_s^{out} 。

将齿廓半径 $R_s = R_2$ 、 $z_2 = -r_{sm1}$ 代入等角螺旋线面齿轮齿面方程, 可计算出啮合角 ϕ_s^{out} 。其中, R_2 为面齿轮外径; $r_{sm1} = r - h_a$, h_a 为齿顶高。

2) 计算轮齿内齿廓齿顶位置啮合角 ϕ_s^{in} 。

将 $R_s = R_1$ 、 $z_2 = -r_{sm1}$ 代入等角螺旋线面齿轮齿面方程, 可计算出啮合角 ϕ_s^{in} 。其中, R_1 为面齿轮内径。

3) 计算轮齿内齿廓过渡曲线起点处啮合角 ϕ_s^{in} 。

将 $R_s = R_1$ 代入等角螺旋线面齿轮齿面方程, 并将圆柱齿轮齿顶位置对应的展角 $\theta_s^{ha} = \ln(r_{as}/r)/k$ 代入, 可计算出啮合角 ϕ_s^{in} 。其中, r_{as} 为圆柱齿轮齿顶圆

半径。

4) 计算轮齿外齿廓过渡曲线终点处啮合角 ϕ_s^{hf} 。

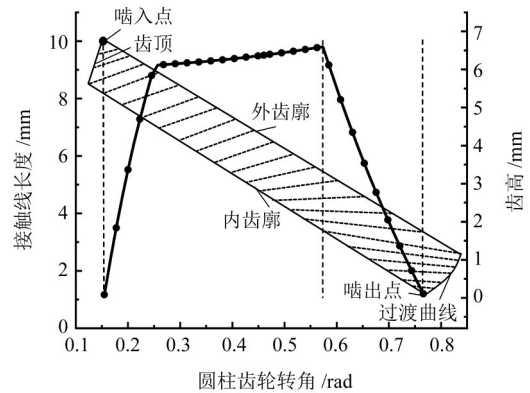
将齿廓半径 $R_s = R_2$ 代入等角螺旋线面齿轮齿面方程, 并将展角 θ_s^{ha} 代入, 可计算出啮合角 ϕ_s^{hf} 。

基于以上齿面啮合点离散算法, 即可实现齿面离散化, 进而获得每个瞬时啮合点的重合度、主曲率、滑动率以及计算接触线长度等重要特性参数。

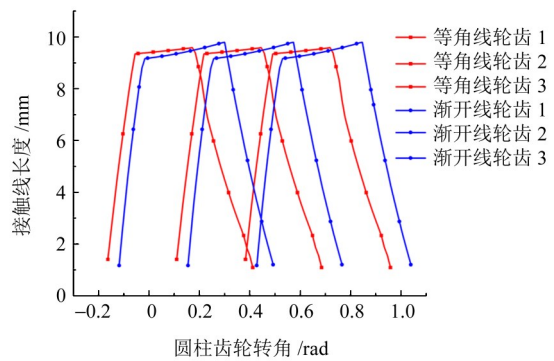
3.2 接触线长度及重合度计算

通过计算获得各个轮齿的啮入角度、啮出角度及接触线长度, 以此分析面齿轮啮合状态, 如图6所示。面齿轮的重合度 ε 可以通过单个轮齿啮入角度与啮出角度的差 $\Delta\varphi_1$ 与相邻两齿啮入角度的差 $\Delta\varphi_2$ 的比值来计算, 即

$$\varepsilon = \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta\varphi_2} \tag{10}$$



(a) 面齿轮单齿啮合



(b) 面齿轮多齿啮合

图6 面齿轮啮合状态

Fig. 6 Mesh state of the face gear

由图6可知, 等角螺旋线面齿轮齿面接触线分布规律与渐开线面齿轮齿面接触线分布规律一致。通过计算得到, 等角螺旋线面齿轮的重合度为2.1049, 略低于渐开线面齿轮的重合度2.2377, 原因在于:

1) 两种齿廓曲线存在差异。等角螺旋线面齿轮主曲率相对较小; 当齿全高一致时, 齿廓弧长相对

较短。因此，轮齿更慢进入啮合，更快退出啮合，导致重合度降低。

2) 渐开线面齿轮采用正常制齿高，而等角螺旋线面齿轮采用短齿制齿高，导致齿廓弧长更短，降低了重合度。但两者重合度均大于2。

3) 由于采用了不同齿形，因此，无法仅根据重合度大小对其承载能力等特性进行评估。

3.3 面齿轮副主曲率分析

面齿轮副齿面主曲率的大小直接影响齿面接触应力的大小和接触区域的形状，分析齿面主曲率的变化规律对于提高面齿轮传动的承载能力具有重要意义。由微分几何学可知，齿轮的主曲率 K_1 和 K_2 可以表示为

$$K_{1,2} = -\frac{2MF - LG - NE}{2(EG - F^2)} \pm \sqrt{\left[\frac{2MF - LG - NE}{2(EG - F^2)}\right]^2 - \frac{LN - M^2}{EG - F^2}} \quad (11)$$

式中， $L = nr_{uu}$ ； $M = nr_{uv}$ ； $N = nr_{vv}$ ； $E = r_u r_u$ ； $F = r_u r_v$ ； $G = r_v r_v$ ； \mathbf{n} 为齿轮单位法向量； r_u 、 r_v 、 r_{uv} 均为齿面方程对变量参数的求导。

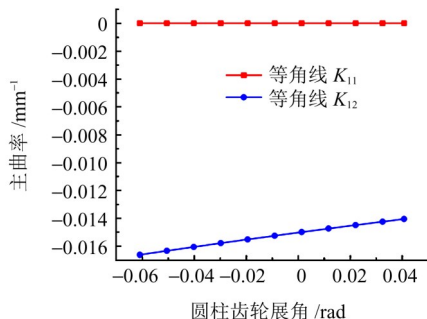
当圆柱齿轮齿廓为等角螺旋线时，结合式(11)，可求解得到圆柱齿轮齿面任意点处的主曲率 K_{11} 和 K_{12} ，即

$$\begin{cases} K_{11} = 0 \\ K_{12} = -\frac{1}{r_0 e^{k\theta} \sqrt{k^2 + 1}} \end{cases} \quad (12)$$

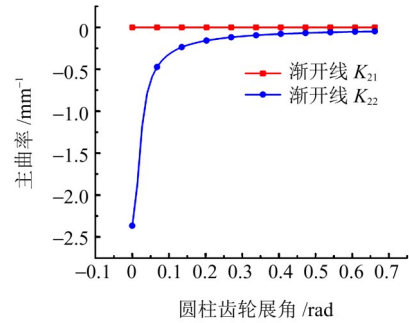
同理，可求解得到渐开线圆柱齿轮齿面主曲率，即

$$\begin{cases} K_{21} = 0 \\ K_{22} = -\frac{1}{r_{bs} \theta_s} \end{cases} \quad (13)$$

图7所示为计算获得的圆柱齿轮主曲率，图8、图9所示为等角螺旋线面齿轮和渐开线面齿轮分别沿齿高方向与齿宽方向的主曲率。



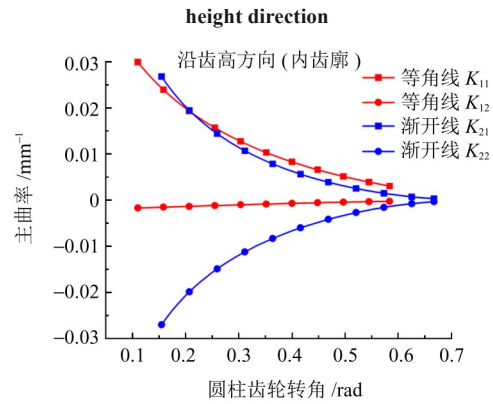
(a) 等角螺旋线圆柱齿轮



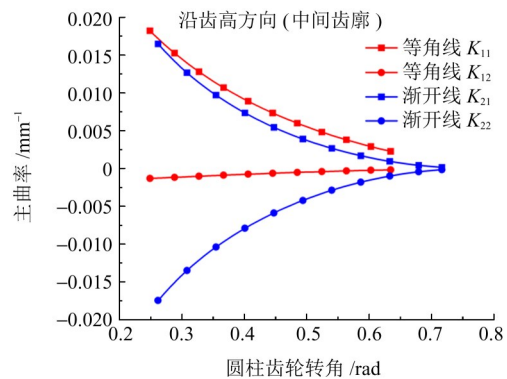
(b) 渐开线圆柱齿轮

图7 圆柱齿轮沿齿高方向主曲率

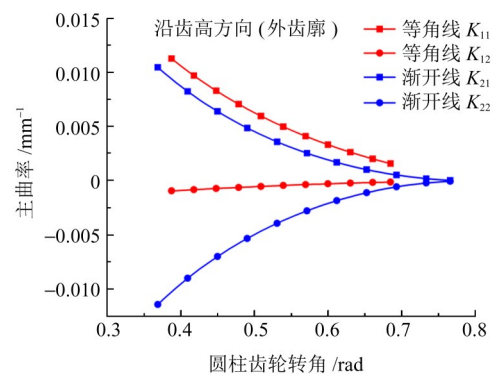
Fig. 7 Principal curvature of the cylindrical gear along the tooth



(a) 内齿廓



(b) 中间齿廓



(c) 外齿廓

图8 面齿轮沿齿高方向主曲率

Fig. 8 Principal curvature of the face gear along the tooth height

direction

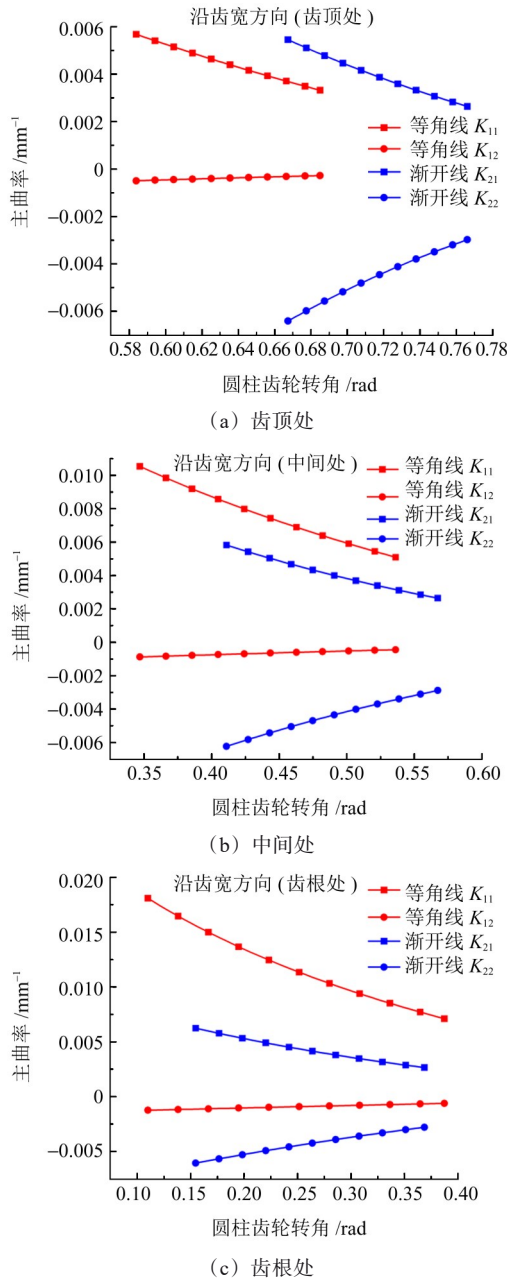


图9 面齿轮沿齿宽方向主曲率

Fig. 9 Principal curvature of the face gear along the tooth width direction

图7(a)所示为等角螺旋线圆柱齿轮的主曲率, 图7(b)所示为渐开线圆柱齿轮的主曲率。由图7可知, 两种齿廓曲线圆柱齿轮均有一个主曲率为0, 而另一个主曲率相差较大。分析其原因可知, 渐开线圆柱齿轮的主曲率 K_{22} 与 θ_s 有关, 当 θ_s 趋于0时, K_{22} 趋于负无穷大; 而等角螺旋线圆柱齿轮的主曲率 K_{12} 变化不大。

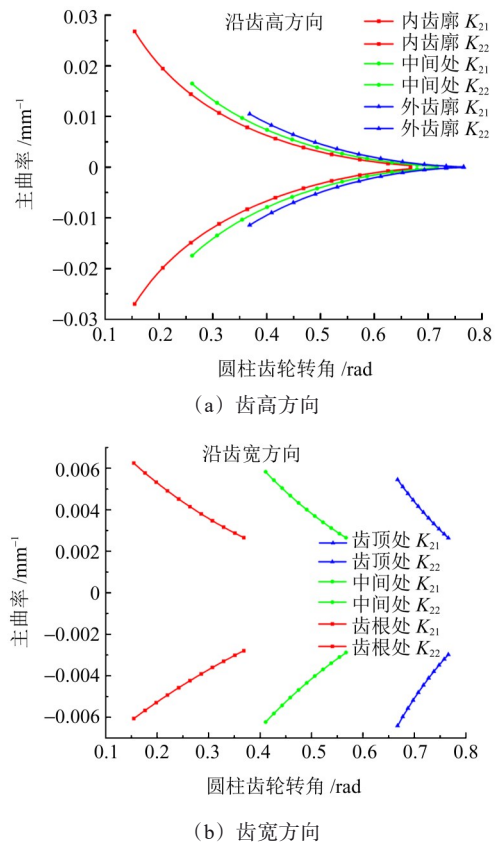
因此, 等角螺旋线圆柱齿轮主曲率相比渐开线圆柱齿轮主曲率从齿根到齿顶的变化更小且更平缓。

由图8可知, 沿着内齿廓-中间齿廓-外齿廓方向, 面齿轮齿高方向主曲率逐渐减小。等角螺旋线面齿轮的主曲率 K_{11} 与渐开线面齿轮主曲率 K_{21} 相差不

大; 而等角螺旋线面齿轮的主曲率 K_{12} 基本趋近于0, 显著小于渐开线面齿轮的主曲率 K_{22} , 则等角螺旋线面齿轮沿齿高方向其齿廓趋于直线。由图9可知, 沿着齿顶-中间齿廓-齿根方向, 面齿轮齿宽方向主曲率逐渐增大。等角螺旋线面齿轮的主曲率 K_{11} 略大于渐开线面齿轮的主曲率 K_{21} ; 但等角螺旋线面齿轮的主曲率 K_{12} 基本趋近于0, 显著小于渐开线面齿轮的主曲率 K_{22} , 则等角螺旋线面齿轮沿齿宽方向其齿廓趋于直线。

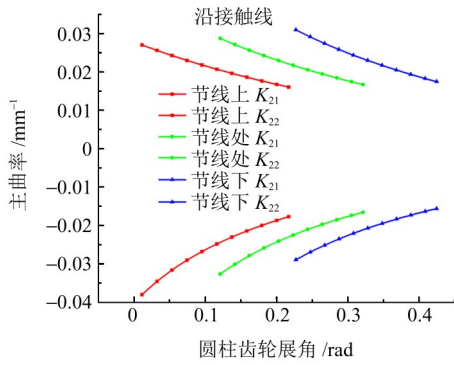
因此, 等角螺旋线面齿轮副沿齿高方向、齿宽方向均近似于面接触, 共轭齿廓间侧隙小, 面齿轮承载能力更高。

图10、图11所示为两种齿廓曲线面齿轮沿齿高方向、齿宽方向、接触线方向的各自主曲率变化规律。由图10可知, 沿着内齿廓-中间齿廓-外齿廓方向, 渐开线面齿轮齿高方向主曲率逐渐降低; 沿着齿顶-中间齿廓-齿根方向, 齿宽方向主曲率逐渐增大; 沿着啮入点-啮出点方向, 接触线主曲率逐渐增大; 得知靠近齿根过渡曲面处主曲率最大, 靠近齿顶处主曲率最小。由图11可知, 等角螺旋线面齿轮主曲率呈现出与渐开线面齿轮主曲率一致的规律; 但在啮出点处主曲率增大较多, 原因在于相同内外半径时, 等角螺旋线面齿轮在齿根处的根切相较于渐开线面齿轮会偏多, 导致主曲率偏大。



(a) 齿高方向

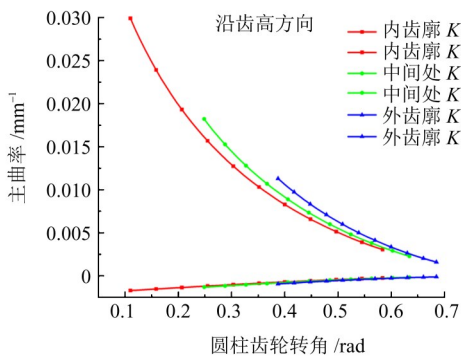
(b) 齿宽方向



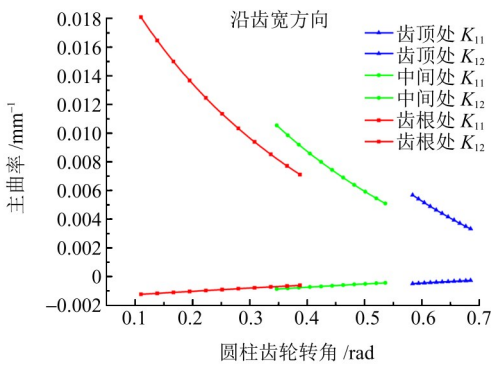
(c) 接触线方向

图 10 渐开线齿廓面齿轮主曲率分析

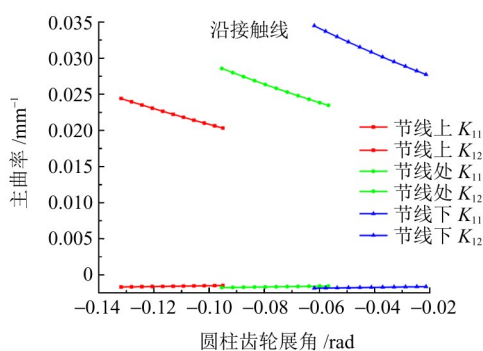
Fig. 10 Principal curvature analysis of the involute tooth profile face gear



(a) 齿高方向



(b) 齿宽方向



(c) 接触线方向

图 11 等角螺旋线齿廓面齿轮主曲率分析

Fig. 11 Principal curvature analysis of the equiangular profile face gear

综上所述，等角螺旋线面齿轮副中，一个主曲率基本接近于0，而另一个主曲率变化较小，较小的曲率变化有助于提高面齿轮副的承载能力。且曲率

变化小可以使面齿轮副之间的摩擦磨损减小、传动更平稳、振动噪声也更小。以上对面齿轮副主曲率的分析可以体现出将齿廓曲线由渐开线设计为等角螺旋线的优势所在。

3.4 面齿轮副滑动率分析

滑动率对面齿轮副性能有着直接的影响。面齿轮副啮合过程中，齿廓发生相对滑动会造成齿面胶合、齿面磨损等齿面损伤。接触方向上两啮合齿廓的滑动率可分别表示为

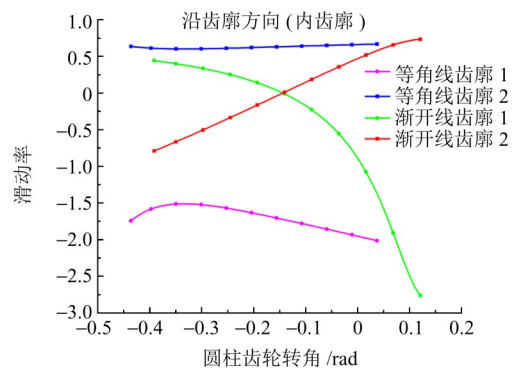
$$\begin{cases} \sigma_1 = \lim_{\Delta S_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta S_1 - \Delta S_2}{\Delta S_1} = \frac{dS_1 - dS_2}{dS_1} \\ \sigma_2 = \lim_{\Delta S_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta S_2 - \Delta S_1}{\Delta S_2} = \frac{dS_2 - dS_1}{dS_2} \end{cases} \quad (14)$$

式中， S_1 、 S_2 分别为两齿廓的弧长； dS_1 、 dS_2 分别为两齿廓的弧长微分。

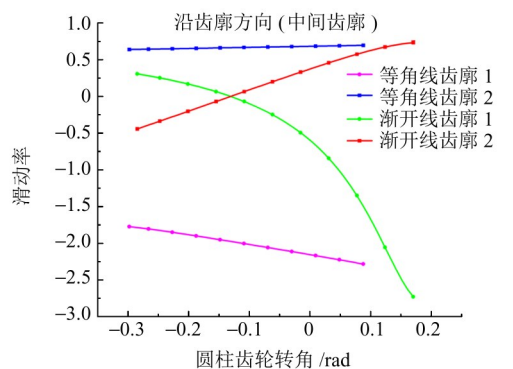
由微分几何学可得， dS_1 、 dS_2 分别为

$$\begin{cases} dS_1 = \sqrt{(dx_1)^2 + (dy_1)^2 + (dz_1)^2} \\ dS_2 = \sqrt{(dx_2)^2 + (dy_2)^2 + (dz_2)^2} \end{cases} \quad (15)$$

等角螺旋线面齿轮和渐开线面齿轮沿齿廓方向的滑动率如图12所示。沿着内齿廓-中间齿廓-外齿廓方向，相比渐开线面齿轮副的滑动率，等角螺旋线面齿轮副沿齿廓方向的滑动率相差不大，变化趋于直线，有利于润滑过程中形成更加均匀的油膜厚度，也有助于提升面齿轮胶合承载性能。



(a) 内齿廓



(b) 中间齿廓

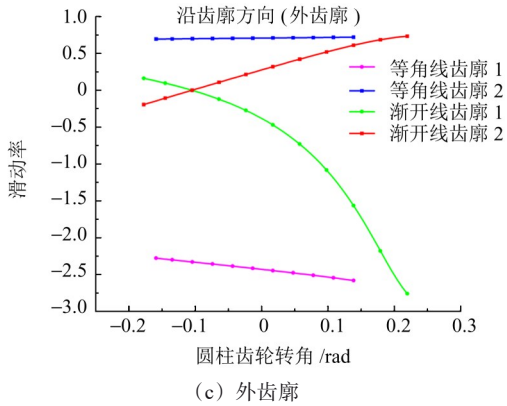


图 12 面齿轮副滑动率分析

Fig. 12 Analysis of the sliding rate of the face gear pair

3.5 面齿轮副压力角计算

齿轮压力角对齿轮的啮合性能具有显著影响, 直接影响齿轮的啮合传动性能和使用寿命。图 13 为等角螺旋线圆柱齿轮副任意啮合位置的的压力角分析示意图。图 13 中, $n-n$ 为啮合点处的公切线; V_1 为从动圆柱齿轮在此刻的速度; F_{n21} 为主动圆柱齿轮对从动圆柱齿轮的作用力; F_{n21} 和 V_1 之间的夹角 α 即为该啮合位置的的压力角。

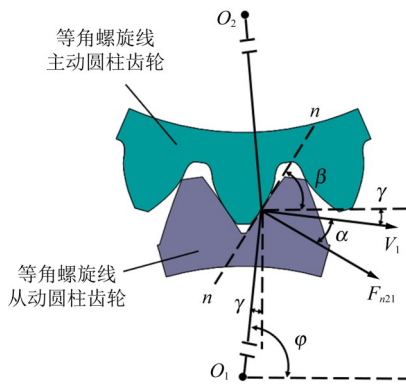


图 13 圆柱齿轮压力角分析

Fig. 13 Analysis of the pressure angle of the cylindrical gear

根据几何推导可得

$$\begin{cases} \alpha = 90^\circ - \beta - \gamma \\ \varphi = 90^\circ - \gamma \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \tan \beta = \frac{dy_1(\theta_s)/d\theta_s}{dx_1(\theta_s)/d\theta_s} \\ \tan \varphi = \frac{|y_1(\theta_s)|}{|x_1(\theta_s)|} \end{cases} \quad (17)$$

将等角螺旋线圆柱齿轮齿廓方程代入可得, 圆柱齿轮的压力角为

$$\alpha = \arctan \frac{1}{k} \quad (18)$$

其中, $k = \cot \beta$ 。所以, $\alpha = \beta$ 。可知, 等角螺旋线圆柱齿轮在任意啮合位置的的压力角 α 恒等于等角螺旋线的螺旋角 β , 为一常数。

图 14 为面齿轮副任意啮合位置的的压力角分析示意图。

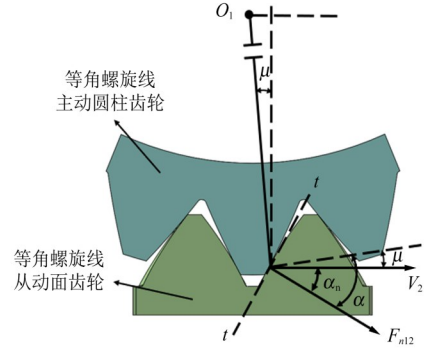


图 14 面齿轮压力角分析

Fig. 14 Analysis of the pressure angle of the face gear

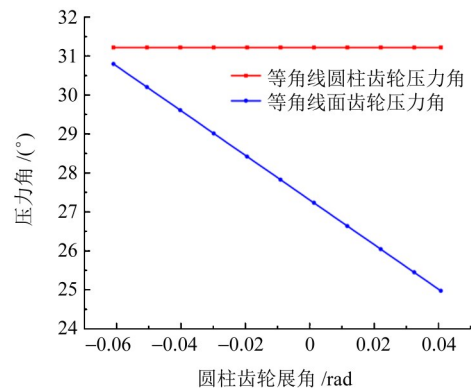
图 14 中, $t-t$ 为啮合点处的公切线; V_2 为面齿轮在此刻的速度; F_{n12} 为圆柱齿轮对面齿轮的作用力; F_{n12} 和 V_2 之间的夹角 α_n 即为该啮合位置的的压力角。根据几何推导, 有

$$\begin{cases} \alpha_n = \alpha - \mu \\ \tan \mu = \frac{|x_1(\theta_s)|}{|y_1(\theta_s)|} \end{cases} \quad (19)$$

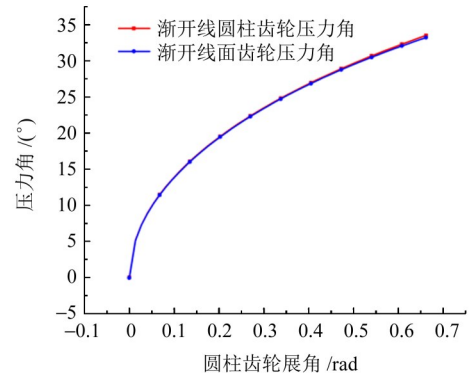
将等角螺旋线圆柱齿轮齿廓方程代入可得, 面齿轮压力角为

$$\alpha_n = \alpha - \theta_s - \theta_{os} \quad (20)$$

同理, 可计算出渐开线面齿轮副的压力角。等角螺旋线和渐开线面齿轮副压力角的变化规律对比如图 15 所示。



(a) 等角螺旋线圆柱齿轮



(b) 渐开线圆柱齿轮

图 15 面齿轮副压力角

Fig. 15 Pressure angles of the face gear pair

由图15可知,等角螺旋线圆柱齿轮的压力角是恒定值,渐开线圆柱齿轮的压力角是变化的;等角螺旋线面齿轮的压力角从齿根到齿顶是逐渐减小的,变化范围不大;而渐开线面齿轮的压力角从基圆到齿顶是逐渐增大的,变化范围较大。由以上对比分析可知,等角螺旋线面齿轮副相比渐开线面齿轮副更利于润滑油膜在齿面均匀铺展,更容易形成润滑油膜,从而有利于提升啮合齿面间的润滑性能。

综上所述,等角螺旋线面齿轮相比渐开线面齿轮承载能力增加、摩擦磨损减小、传动更加平稳。同时,该齿轮的润滑性能更好,有助于面齿轮抗胶合承载能力的提升。

4 面齿轮接触应力和弯曲应力理论解析模型

4.1 线接触面齿轮接触应力

线接触面齿轮所受的齿面接触力分布在齿面接触线上,且接触区域呈矩形形状。假设齿面接触力在轮齿上均匀分布,单位齿长上的载荷为 W_i ,线接触面齿轮副受力分析如图16所示。

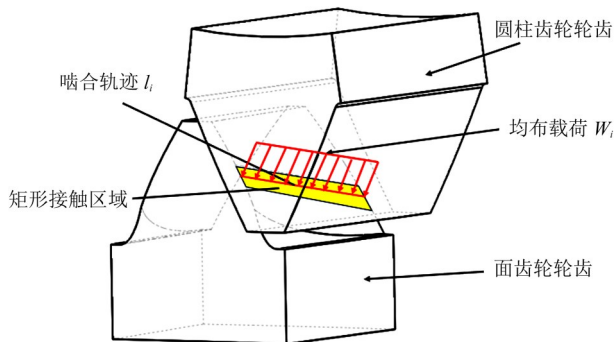


图16 啮合轮齿受力分析

Fig. 16 Force analysis of the meshing gear teeth

面齿轮单位齿长上法向均布载荷 W_i 的计算式为

$$W_i = \frac{T_2}{R_i \cos \alpha_m l_i} \quad (21)$$

式中, T_2 为面齿轮所受的转矩; R_i 、 l_i 与 α_m 分别为面齿轮副任意啮合位置的啮合半径、接触线长度与压力角。

由于面齿轮齿面接触线的参数方程难以求解,故无法通过积分的方法来求接触线的长度。可通过齿面离散获得接触线上所有离散点,对于每对连续的点 (x_i, y_i, z_i) 和 $(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$,使用两点间的距离计算式来计算这两点间的线段长度,从而求得接触线的长度。计算获得的任意啮合位置的接触线长度为

$$l_i = \sum_{i=1}^{N_i} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2} \quad (22)$$

因此,线接触面齿轮的齿面最大接触应力计算式为

$$\sigma_{Hmax} = \sqrt{\frac{W_i}{\pi} (K_{11} - K_{12} + K_{21} - K_{22}) / \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)} \quad (23)$$

式中, E_1 、 E_2 分别为小齿轮与面齿轮的弹性模量; ν_1 、 ν_2 分别为小齿轮与面齿轮的泊松比。

4.2 面齿轮弯曲应力

面齿轮为变齿厚齿轮,用传统当量齿轮的方法计算面齿轮齿根弯曲应力存在一定局限性。因此,采用悬臂板法计算面齿轮齿根弯曲应力的大小及分布。图17所示为面齿轮轮齿的悬臂模型。因面齿轮沿齿宽方向的齿廓趋于直线,故面齿轮齿根截面可以视为等腰梯形。

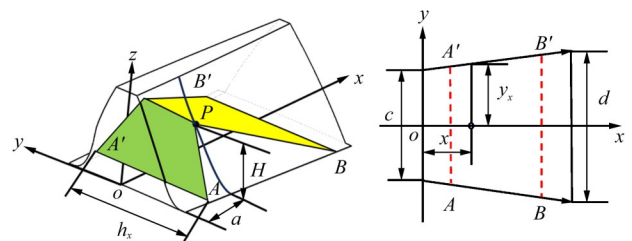


图17 面齿轮轮齿悬臂模型

Fig. 17 Cantilever model of the face gear teeth

设面齿轮齿宽为 b ;齿根截面内径处宽度 $c = y_{i+1} - y_i$;外径处宽度 $d = y_{j+1} - y_j$ 。则齿根曲线的方程为

$$y = \frac{d - c}{2b} x + \frac{c}{2} \quad (24)$$

设齿面接触点为 P ;与内径的距离为 a ; P 点在节线附近与齿根截面的距离为 H 。将面齿轮轮齿悬臂模型等效为无数个宽度趋于0的悬臂杆,杆件的自由端连接于啮合点 P ,另一端固定于齿根截面。设 P 点与固定端之间的杆长为 l_x ; P 点的挠度为 ω_p ,则悬臂杆垂直杆长方向截面内的最大弯曲应力计算式为

$$\sigma = \frac{M_x y_x}{I_x} = \frac{3E\omega_p y_x}{l_x^2} \quad (25)$$

式中, M_x 为悬臂杆的弯矩; I_x 为惯性矩; E 为弹性模量。

推导可获得面齿轮沿齿宽方向最大弯曲应力计算式,即

$$\sigma_x = \frac{6b^2 T_2 [(d - c)x + bc]}{R [H^2 + (x - a)^2]} \left(1 / \left\{ \int_0^b \frac{[(d - c)x + bc]^3}{[H^2 + (x - a)^2]^{\frac{3}{2}}} dx \right\} \right) \quad (26)$$

5 面齿轮应力仿真分析

5.1 建立面齿轮副有限元模型

建立两种不同齿廓曲线的面齿轮副三维模型,

以面齿轮最中间轮齿为研究对象, 分析其在啮入、节线和啮出这3个不同啮合位置的应力。采用的面齿轮副网格模型如图18所示。

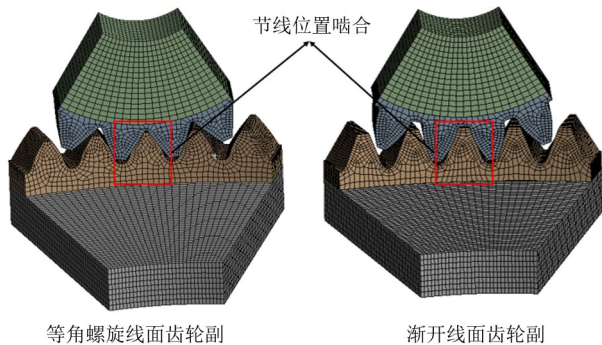


图18 面齿轮副网格模型

Fig. 18 Mesh model of the face gear pair

5.2 仿真结果分析

定义面齿轮副材料为45钢, 将圆柱齿轮固定约束, 面齿轮承受100 N·m的转矩。分别对两种不同齿廓曲线面齿轮副进行静应力仿真, 结果分别如图19、图20所示。等角螺旋线面齿轮和渐开线面齿轮的仿真结果与理论结果对比如表2所示。

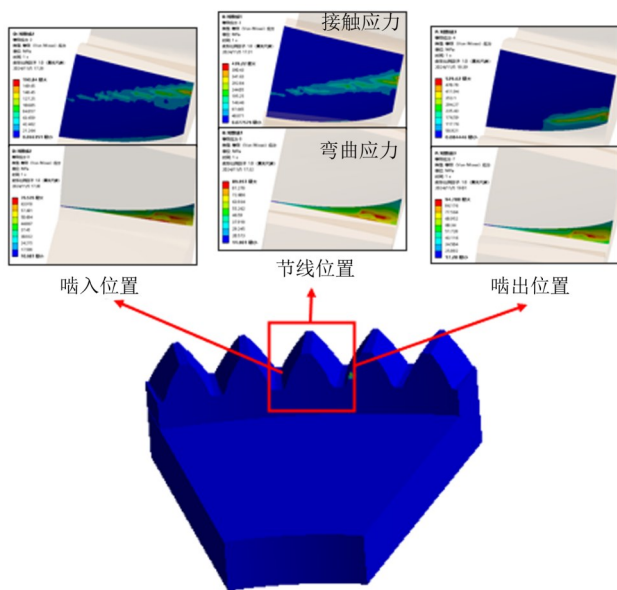


图19 等角螺旋线齿廓面齿轮应力

Fig. 19 Stress of the equiangular spiral tooth profile face gear

表2 面齿轮应力大小

Tab. 2 Stress magnitude of the face gear 单位: MPa

	渐开线 接触应力	等角线 接触应力	渐开线 弯曲应力	等角线 弯曲应力
理论结果	508.51	470.49	108.22	83.86
啮入位置	434.02	190.84	108.90	70.54
节线位置	473.33	439.22	125.37	89.95
啮出位置	575.64	529.62	109.47	94.79

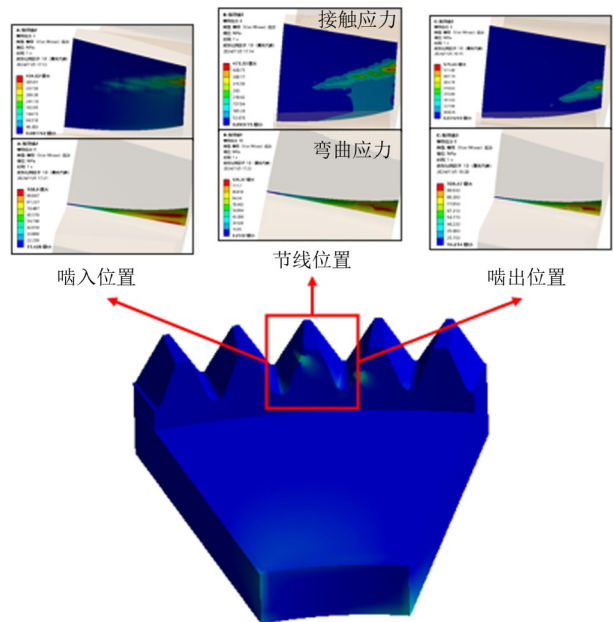


图20 渐开线齿廓面齿轮应力

Fig. 20 Stress of the involute tooth profile face gear

由仿真结果可知:

1) 等角螺旋线面齿轮的接触应力和弯曲应力均小于渐开线面齿轮, 说明等角螺旋线面齿轮的承载能力更高。

2) 从啮入位置到节线位置, 等角螺旋线面齿轮的应力显著小于渐开线面齿轮的应力; 而在节线位置到啮出位置, 应力相当。分析其原因在于, 同等参数下, 等角螺旋线面齿轮根切面积稍大于渐开线面齿轮根切面积。在实际设计过程中, 可考虑将等角螺旋线齿廓与渐开线齿廓进行组合, 在啮入位置到节线位置采用等角螺旋线, 使之具有更好的承载效果; 在节线位置到啮出位置采用渐开线, 以解决根切问题。该设想可为后续的组合齿廓设计提供参考。

3) 通过理论法和仿真法得到的等角螺旋线面齿轮最大接触应力误差为11.2%, 最大弯曲应力误差为11.5%, 验证了面齿轮应力理论解析模型的准确性。

6 结论

将圆柱齿轮齿廓设计成等角螺旋线, 通过面齿轮啮合原理和坐标变换推导出面齿轮齿面方程, 获得等角螺旋线面齿轮副。通过啮合特性分析和应力分析, 得出以下结论:

1) 等角螺旋线面齿轮副的主曲率沿各个方向变化均更小, 且其中一个主曲率趋近于0, 这有助于提高面齿轮副的承载能力及啮合性能, 同时有助于减小面齿轮的应力、降低摩擦磨损和寿命损失。

2) 等角螺旋线圆柱齿轮压力角不变, 面齿轮压力角从齿根到齿顶均匀减小, 这一特性使得等角螺旋线面齿轮副更加符合流体动力学润滑机制, 使啮合齿面间油膜的形成更具均匀性。

3) 相较于渐开线面齿轮, 等角螺旋线面齿轮的接触应力降低了56%, 弯曲应力降低了35%, 凸显出更高的承载能力。

考虑到将齿廓全部设计成等角螺旋线时轮齿根切问题会更严重, 未来研究可将面齿轮齿廓设计成组合齿廓的形式, 即一部分采用渐开线齿廓, 另一部分采用等角螺旋线齿廓, 以此进一步提高面齿轮的抗胶合承载性能。

参 考 文 献

- [1] 李强, 王鑫龙, 张科, 等. 载荷作用下对数螺旋锥齿轮齿面接触分析[J]. 现代制造工程, 2020(3): 152-156.
LI Qiang, WANG Xinlong, ZHANG Ke, et al. Contact analysis of logarithmic spiral bevel gears under load[J]. Modern Manufacturing Engineering, 2020(3): 152-156.
- [2] ZHOU G C, YANG Y H, XIE R, et al. A design method for a novel movable tooth drive with logarithmic spiral conjugated tooth profiles [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2022, 236(17): 9527-9542.
- [3] MO J Y, YUAN K, WANG R, et al. Computerised design, simulation of meshing and stress analysis of bionic logarithmic spiral spur gear drives[J]. Journal of Engineering Design, 2024, 35(7): 874-900.
- [4] HOCHREIN J F, OTTO M, STAHL K. Face gear drives: nominal contact stress calculation for flank load carrying capacity evaluation[J]. Mechanism and Machine Theory, 2024, 195: 105573.
- [5] SARIBAY Z B. Tooth geometry and bending stress analysis of conjugate meshing face-gear pairs [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2013, 227(6): 1302-1314.
- [6] SANDRO B, LEONARDO B, PAOLA F. Evaluation of the effect of misalignment and profile modification in face gear drive by a finite element meshing simulation [J]. Journal of Mechanical Design, 2004, 126(5): 916-924.
- [7] ZANZI C, PEDRERO J I. Application of modified geometry of face gear drive [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194(27/28/29): 3047-3066.
- [8] PATIL S S, KARUPPANAN S, ATANASOVSKA I. Experimental measurement of strain and stress state at the contacting helical gear pairs [J]. Measurement, 2016, 82: 313-322.
- [9] HUSSEIN A W, ABDULLAH M Q. Experimental stress analysis of enhanced sliding contact spur gears using transmission photoelasticity and a numerical approach [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2023, 237(18): 4316-4336.
- [10] LITVIN F L, GONZALEZ-PEREZ I, FUENTES A, et al. Design, generation and stress analysis of face-gear drive with helical pinion [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194(36/37/38): 3870-3901.
- [11] LITVIN F L, FUENTES A, ZANZI C, et al. Design, generation, and stress analysis of two versions of geometry of face-gear drives [J]. Mechanism and Machine Theory, 2002, 37(10): 1179-1211.
- [12] ZHOU W G, ZHU R P, LI Z W, et al. Theoretical and experimental research on tooth root bending stress of face gear [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2024, 238(14): 7172-7188.
- [13] LI Z, WU H, ZHU R P. Influence predictions of geometric parameters on face gear strength [J]. Advances in Mechanical Engineering, 2015, 7(3): 1687814015574425.
- [14] 周辉俊, 李政民卿, 黄鹏, 等. 基于均布载荷的正交面齿轮齿根弯曲应力计算方法研究 [J]. 机械制造与自动化, 2014, 43(1): 20-22.
ZHOU Huijun, LI Zhengminqing, HUANG Peng, et al. Research on calculation method of bending stress of orthogonal face-gear tooth root based on uniform load [J]. Machine Building & Automation, 2014, 43(1): 20-22.
- [15] 靳广虎, 朱如鹏, 李政民卿, 等. 齿宽系数对面齿轮齿根弯曲应力的影响 [J]. 中南大学学报(自然科学版), 2011, 42(5): 1303-1309.
JIN Guanghu, ZHU Rupeng, LI Zhengminqing, et al. Impact of coefficient of tooth width on bending stress of face gear [J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2011, 42(5): 1303-1309.
- [16] 秦德润, 杨龙, 唐进元, 等. 非正交斜齿面齿轮弯曲强度计算方法研究 [J]. 机械传动, 2020, 44(1): 1-6.
QIN Derun, YANG Long, TANG Jinyuan, et al. Research of the calculation method of bending strength of non-orthogonal helical face gear [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2020, 44(1): 1-6.
- [17] 杨主希, 邬远航, 唐进元. 非正交修形斜齿面齿轮传动接触应力计算研究 [J]. 机械传动, 2020, 44(2): 16-21.
YANG Zhuxi, WU Yuanhang, TANG Jinyuan. Research of calculation method of contact stress of non-orthogonal modified face-gear drive with helical pinion [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2020, 44(2): 16-21.
- [18] 唐进元, 刘艳平. 直齿面齿轮加载啮合有限元仿真分析 [J]. 机械工程学报, 2012, 48(5): 124-131.
TANG Jinyuan, LIU Yanping. Loaded meshing simulation of face-gear drive with spur involute pinion based on finite element analysis [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(5): 124-131.
- [19] TANG J Y, LIU Y P. Loaded multi-tooth contact analysis and calculation for contact stress of face-gear drive with spur involute pin-

- ion [J]. Journal of Central South University, 2013, 20 (2) : 354-362.
- [20] 方宗德, 李建华, 彭先龙, 等. 弧线齿面齿轮应力过程分析[J]. 航空动力学报, 2012, 27(12):2814-2820.
FANG Zongde, LI Jianhua, PENG Xianlong, et al. Analysis of stress process for face gear with arcuate tooth pinion [J]. Journal of Aerospace Power, 2012, 27(12):2814-2820.
- [21] 吴学辉, 沈云波. 面齿轮新型齿面结构弯曲强度计算机仿真分析[J]. 机械传动, 2011, 35(4):36-39.
WU Xuehui, SHEN Yunbo. Computer simulation analysis for flexural strength of face gear with new tooth fillet surface [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2011, 35(4):36-39.
- [22] ZHANG J L, FANG Z D, CAO X M, et al. The modified pitch cone design of the hypoid gear: manufacture, stress analysis and experimental tests [J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42 (2): 147-158.
- [23] 王延忠, 王树, 田志敏, 等. 面齿轮传动加载接触分析研究[J]. 机械传动, 2012, 36(10):4-7.
WANG Yanzhong, WANG Shu, TIAN Zhimin, et al. Research on loading tooth contact analysis of face gear transmission [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2012, 36(10):4-7.
- [24] 王延忠, 龚康, 吴灿辉. 航空面齿轮传动接触应力计算方法研究 [J]. 机床与液压, 2011, 39(21):1-4.
WANG Yanzhong, GONG Kang, WU Canhui. Research on contact stress calculation methods of face-gear for aerospace power drives [J]. Machine Tool & Hydraulics, 2011, 39(21):1-4.
- [25] 林超, 王瑶, 蔡志钦. 正交变传动比面齿轮副的强度计算与分析 [J]. 四川大学学报(工程科学版), 2015, 47(1):200-206.
LIN Chao, WANG Yao, CAI Zhiqin. Calculation and analysis of strength for orthogonal variable transmission ratio face gear [J]. Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition), 2015, 47(1):200-206.
- [26] YU Y Q, LIN C, HU Y N. Tooth bending stress analysis of high speed curve face gear of composite transmission [J]. Mechanics and Industry, 2021, 22:20.
- [27] LIU S Y, SONG C S, ZHU C C, et al. Investigation on contact and bending stress of face-hobbed and face-milled hypoid gear [J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 150: 103873.

Meshing characteristics and stress analysis of equiangular spiral profile face gears

DING Shuaiqiang¹ CAI Zhiqin^{1,2} YAO Bin¹ XU Shuidian^{1,3} LI Zhisheng⁴

(1. School of Aeronautics and Astronautics, Xiamen University, Xiamen 361102, China)

(2. State Key Laboratory of Mechanical Transmission for Advanced Equipment, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

[3. Chuanfu Technology (Xiamen) Co., Ltd., Xiamen 361102, China]

(4. China Academy of Machinery Zhengzhou Research Institute of Mechanical Engineering Co., Ltd., Zhengzhou 450001, China)

Abstract: [Objective] With the increasing demand for the load-bearing capacity and service life of face gear transmission systems in the industrial field, a design method for face gear pair transmission based on equiangular spiral tooth profile was proposed to further enhance the load-bearing performance of face gear transmission. [Methods] The formation principle of the tooth surface of face gear with equiangular spiral was studied, and the discrete model of the tooth surface of face gear with equiangular spiral was derived by solving the meshing parameters of the meshing inlet point, meshing outlet point, the top point of the inner tooth profile and the root point of the outer tooth profile. The correctness of the tooth surface model was verified by using the numerical computation examples. The key characteristic parameters such as principal curvature, sliding rate and pressure angle of face gear with equiangular spiral were analyzed to prove that the tooth profile of face gear which are conjugated through the tooth profile of cylindrical gear are still equiangular spiral. The theoretical analytical model for the contact stress and bending stress of face gear was derived, and the accuracy of the theoretical model was verified through simulation. [Results] The simulation results show that the stress of equiangular spiral face gear is significantly smaller than that of involute face gear. It is concluded that the load bearing capacity of equiangular spiral face gear is significantly higher than that of involute face gear. This study provides a new design idea for improving the load bearing capacity of face gear transmission.

Key words: Equiangular spiral; Face gear; Line contact; Load bearing capacity

(编辑: 刘欢欢)