

考虑齿面微观形貌的磨损齿轮动态响应特性研究

孟凡善¹ 易文浩¹ 张新¹ 靳玉林¹ 王家序²

(1. 西南交通大学 机械工程学院, 成都 610031)

(2. 重庆大学 高端装备机械传动全国重点实验室, 重庆 400044)

摘要:【目的】为探究齿面微观形貌对齿轮接触情况及运行状态的影响, 开展各向异性三维粗糙齿面下的磨损速率及动态响应特性研究。【方法】首先, 基于分形几何理论建立了各向异性三维微观粗糙齿面; 其次, 根据 Archard 理论计算微观粗糙齿面在不同转速和不同工作时长下的非均匀磨损情况, 将齿面磨损深度与齿轮尺寸参数相结合, 求解磨损轮齿啮合时的时变啮合刚度和时变齿隙, 并将其作为齿轮传动系统动力学模型的内激励输入参数; 最后, 采用变步长 Runge-Kutta 算法求解动力学微分方程, 得到齿轮传动系统的动力学响应特性。【结果】结果表明, 在齿面粗糙度相同时, 随着齿轮转速、工作时长的增加, 齿面磨损深度和齿侧间隙逐渐增大, 时变啮合刚度逐渐减小; 在考虑齿面微观形貌的齿轮传动系统中, 随着转速的变化, 齿轮传动系统表现出丰富的动态响应特性; 随着工作时长的增加, 齿轮传动系统的动态传递误差增大, 系统整体动态响应由周期运动状态趋向于混沌运动状态, 进而表现为混沌振动, 这将不利于系统的平稳运行; 对于处于混沌运动状态的磨损齿轮, 改变转矩或转速后, 齿轮传动系统由混沌运动状态转变为较为稳定的周期运动状态。

关键词: 三维粗糙齿面; 磨损; 时变啮合刚度; 齿侧间隙; 动态响应特性

中图分类号: TH132.413 **DOI:** 10.16578/j.issn.1004.2539.2026.03.016

0 引言

齿轮因其传动优势而被广泛应用在多种传动设备中, 其动力学特性能够直接反映齿轮传动系统的运行品质^[1]。然而, 齿轮在正常工作过程中不可避免地会发生齿面磨损, 对传动系统的动力学响应产生影响^[2-3]。因此, 研究齿轮传动系统在不同磨损程度下的内部激励, 有利于掌握系统运行状态, 在合理分配齿轮服役工况、确定齿轮传动系统的最佳使用范围等方面具有重要意义。

齿轮表面的微观形貌对齿轮传动的动力学特性具有直接影响^[4]。受齿轮加工工具等因素的影响, 实际的齿轮表面并非光滑, 而是由大量凹凸体构成的复杂表面。齿面微凸体由于加工工具的不同呈现出各向异性分布特征, 使得考虑齿面微观形貌的粗糙齿面建模成为一个具有挑战性的任务。1990年, MAJUMDAR 等^[5]的研究结果表明, 基于分形几何理

论的 M-B 模型可以较好地模拟齿面粗糙形貌。陈奇等^[6]通过大量试验证明, 分形维数 D 、特征尺度系数 G 与粗糙度 R_a 之间的关系式为 $D = 1.528/R_a^{0.042}$ 、 $G = 10^{-5.26/R_a^{0.042}}$, 实现了分形参数与表面粗糙度之间的相互转化; 该结果表明, 可以通过设置不同的分形维数 D 和特征尺度系数 G 来高度模拟特定粗糙情况下的齿轮和具有特定齿面微观形貌的齿轮, 将复杂粗糙齿面的建模及动力学响应求解问题转化为数学模型的建模及求解问题。YU 等^[7]通过分形几何理论建立了粗糙齿面模型, 并修正了粗糙表面上存在微凸体时齿轮副的齿隙值。ZHAO 等^[8]考虑了分形参数对齿轮接触刚度的影响, 发现随着粗糙度的增大, 时变啮合刚度逐渐减小。LI 等^[9]、HUANG 等^[10]将修正后的齿隙和啮合刚度应用到齿轮系统中, 分析了齿隙和刚度对系统动力学特性的影响。综上所述, 基于分形理论研究粗糙齿面对齿轮传动特性影响的文献很多, 也获得了很多结论。但是, 上述研究均建立了

收稿日期: 2024-11-19 修回日期: 2024-11-27

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(52075456, 52175122, 12102084); 四川省自然科学基金面上项目(2023NSFSC0362, 2023NSFSC0371); 中国博士后科学基金面上项目(2023M732917); 四川省博士后创新人才支持项目(BX202214)

作者简介: 孟凡善, 男, 1994年生, 山东单县人, 博士研究生; 主要研究方向为机械传动系统动力学; Fanshan_meng@163.com。

张新(通信作者), 男, 1989年生, 湖北利川人, 博士, 副教授, 博士研究生导师; 主要研究方向为机械传动系统动力学及装备健康监测、故障诊断与预测; xylon.zhang@swjtu.edu.cn。

引用格式: 孟凡善, 易文浩, 张新, 等. 考虑齿面微观形貌的磨损齿轮动态响应特性研究[J]. 机械传动, 2026, 50(3): 142-153.

MENG Fanshan, YI Wenhao, ZHANG Xin, et al. Study on dynamic response characteristics of worn gears considering tooth micromorphology[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2026, 50(3): 142-153.



免费获取

二维齿面微观形貌模型, 忽略了齿宽方向的微观形貌特征, 影响了模型的准确性。LAN等^[11]考虑到这一不足, 利用分形理论建立了3D粗糙表面法向接触刚度模型, 分析了微观形貌参数对法向接触刚度的影响。XIA等^[12]将二维W-M分形函数在 x 和 y 方向进行叠加, 得到3D各向异性的W-M分形函数, 其优势在于充分考虑了齿廓方向和齿宽方向的齿面微观形貌, 将这2个方向的微凸体按照独立分布特征进行布置, 可以更好地模拟实际的齿面加工形貌。

然而, 目前关于考虑微观形貌的齿面在发生正常磨损后系统动态响应特性变化情况的研究很少。因此, 本文首先基于分形几何理论建立了三维各向异性分形粗糙齿面模型; 接着, 根据Archard理论计算三维粗糙齿面在不同转速、不同工作时长下的磨损情况; 然后, 综合齿面微观形貌和磨损情况, 求解时变啮合刚度和齿侧间隙, 并以此为内激励参数, 研究齿面磨损对传动系统动态响应特性的影响。研究可从理论层面为磨损齿轮适用工况的选择提供一定的参考。

1 三维分形粗糙齿面建模

齿轮表面的微观形貌是凹凸不平的, 齿轮表面具有一定的表面粗糙度。图1^{[13]104366[14]173-182}所示为实际加工齿面的形貌。由图1可知, 齿面微观形貌呈现出特定的方向性。基于分形理论模拟的粗糙表面具有连续性、不可分性、尺度不变性和自相似性等特征, 能够有效克服表面粗糙度表征对样本大小的依赖, 使得对粗糙表面的描述更稳定、更精确。因此, 本文根据二维M-B分形函数表达式, 将 x 方向的分形曲线与 y 方向的分形曲线叠加在一起, 构建 x 、 y 两向异性的三维分形粗糙表面, 克服了齿宽方向微观形貌无法建模的不足; 通过调整不同方向的分形参数, 可以实现对具有特定微观形貌的表面的模拟。沿齿廓方向将齿面弧长等分为 n 份, 则三维各向异性粗糙表面的建模公式为

$$z(x, y) = G_x^{D_x-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2\pi\gamma^n x + \phi)}{\gamma^{(2-D_x)n}} + G_y^{D_y-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2\pi\gamma^n y + \phi)}{\gamma^{(2-D_y)n}} \quad (1)$$

式中, x 、 y 、 z 分别为三维各向异性粗糙表面上各点的横、纵、竖坐标; G_x 、 G_y 分别为 x 、 y 方向上的二维尺度系数; D_x 、 D_y 分别为 x 、 y 方向上的二维分形维数; ϕ 为随机相位; γ 为表明表面平整程度的参数, 基于表面平整度和频率分布密度的考虑, 取 $\gamma = 1.5$ 。所提出的粗糙表面模型如图2所示。

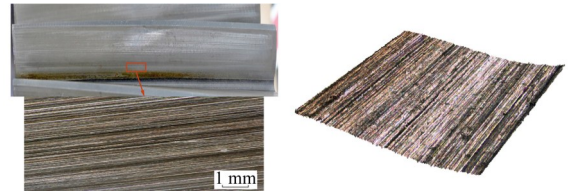
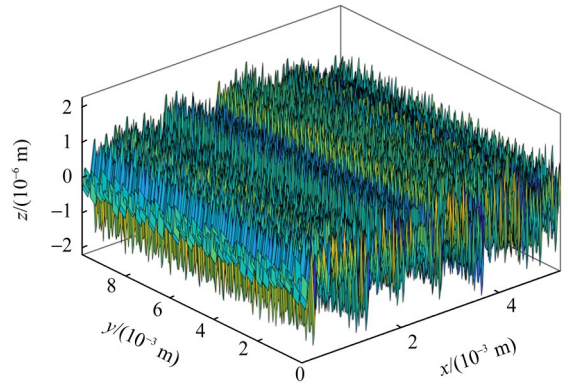
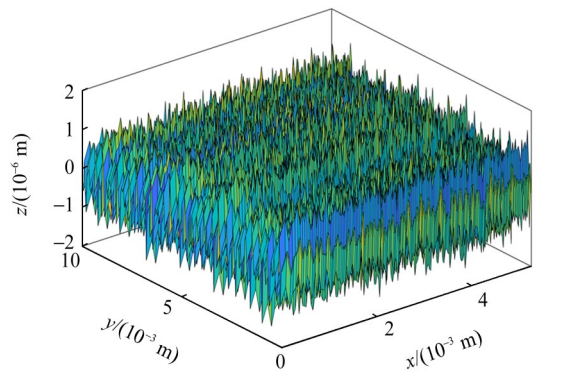


图1 实际齿面形貌

Fig. 1 Actual tooth surface morphology



(a) $D_x = 1.2, D_y = 1.4, G_x = 5 \times 10^{-7} \text{ m}, G_y = 5 \times 10^{-7} \text{ m}$



(b) $D_x = 1.4, D_y = 1.2, G_x = 5 \times 10^{-7} \text{ m}, G_y = 5 \times 10^{-7} \text{ m}$

图2 三维各向异性分形表面模型

Fig. 2 3D anisotropic fractal surface model

根据渐开线齿廓方程, 建立表面光滑的渐开线齿面模型, 如图3(a)所示。其中, 齿轮的基本参数如表1所示。为了保证微观形貌特征能够在垂直方向上均匀分布在光滑齿面上, 将图3(b)所示的各向异性粗糙表面旋转后叠加到光滑齿面上, 即可得到图3(c)所示的各向异性三维粗糙齿面。其中, 具体的旋转矩阵表达式及详细旋转步骤见文献[13]¹⁰⁴³⁶⁶。图3(d)和图3(e)均为粗糙齿面的局部细节图。根据LEI等^{[14]177}的研究结果, 通过电火花线切割方式加工得到的齿面参数 $D = 1.75$ 、 $G = 3.7 \times 10^{-7} \text{ m}$; 通过铣削加工得到的齿面参数 $D = 1.8$ 、 $G = 3.0 \times 10^{-7} \text{ m}$; 通过研磨加工得到的齿面参数 $D = 1.85$ 、 $G = 2.9 \times 10^{-7} \text{ m}$ 。由此可见, 通过常用齿轮加工方式加工获得的齿面分形参数均在一定区间范围内。本文选择对铣削加工齿轮进行建模, 并且在后续对磨损速率、齿侧间隙、啮合刚度及动态响应的研究中均使用该齿面形貌分形参数。

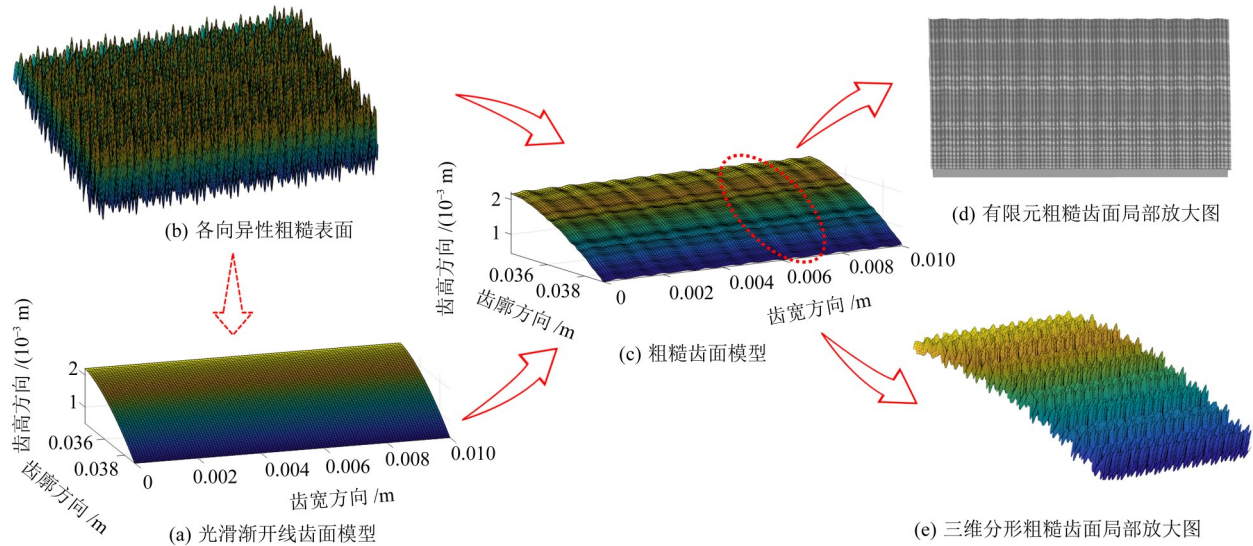


图3 三维各向异性粗糙齿面建模过程

Fig. 3 Modeling process of the 3D anisotropic rough tooth surface

表1 齿轮参数
Tab. 1 Gear parameters

| 参数 | 主/从动轮 | 参数 | 主/从动轮 |
|---------|-----------|----------|--------------------|
| 齿数 | 24/24 | 屈服强度/MPa | 3.53×10^9 |
| 模数/mm | 1.5/1.5 | 泊松比 | 0.3 |
| 质量/kg | 0.76/0.76 | 弹性模量/GPa | 206 |
| 齿宽/mm | 10 | 齿顶系数 | 1 |
| 轴孔半径/mm | 5/5 | 齿顶间隙系数 | 0.25 |

2 啮合刚度和齿隙的计算

2.1 时变齿侧间隙的计算

为了减小齿轮制造误差的影响,便于齿轮的安装,防止齿轮在旋转过程中发生卡死,齿轮副中需要预留一定的初始齿隙^[15],本文中设定初始齿隙值 b_0 为 $50 \mu\text{m}$ 。相比理想光滑齿面,粗糙齿面上大量的微凸体将引起齿隙值发生改变。如图4所示,齿面微凸体改变了2个轮齿相应接触区域之间的距离,从而改变了齿隙值。粗糙齿轮啮合时的接触本质是微凸体间的接触。微凸体尺寸越大,主、从动轮齿面接触的距离越短,齿隙越小。因此,粗糙表面之间的实际齿隙值与微凸体的平均高度有关。根据分形函数,在主动轮齿面 (x_0, y_0) 处,单个微凸体的高度可以表示为

$$z_0(x_0, y_0) = G_x^{D_x-1} \sum_{n=n_{\min}}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi\gamma^n x_0 + \phi_{m,n})}{\gamma^{(2-D_x)n}} + G_y^{D_y-1} \sum_{n=n_{\min}}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi\gamma^n y_0 + \phi_{m,n})}{\gamma^{(2-D_y)n}} \quad (2)$$

式中, n_{\min} 为沿齿廓方向等分齿面弧长的最小份数。

主动轮齿面第 n_j 处微凸体高度的算术平均值为

$$b_{j,p}(j) = \sum_{y_1=1}^n z(x, y)/(w_j \cdot L), j \in (1, n) \quad (3)$$

同理,可以计算得到从动轮上第 n_j 处微凸体的高度值 $b_{j,g}$ 。因此,由齿面微凸体引起的主、从动轮之间第 n_j 处的齿隙修正值 $b_j = b_{j,p} + b_{j,g}$ 。

根据LEI等^{[14][17]}对齿轮加工方式与齿面分形参数之间关系的研究,结合表1中的齿轮基本参数,设定轮齿的加工方式为铣削加工,齿面分形参数 $D_x = 1.8$, $D_y = 1.7$, $G_x = 3 \times 10^{-7} \text{m}$, $G_y = 3 \times 10^{-7} \text{m}$ 。据此,结合式(2)、式(3)可计算得到齿面微凸体的高度值 b_j ,如图5所示。

另外,在实际的齿轮传动过程中,齿面不可避免地会发生磨损。在粗糙齿面啮合过程中,由于在节线以外的区域主动轮和从动轮的相对速度并不相同,相接触的微凸体之间不仅有挤压变形,还发生相对滑动,从而产生磨损。为了量化齿面微观形貌与磨损速率之间的关系,本文从齿隙的角度探究分形参数与系统动力学内激励之间的关联。将表达齿面粗糙形貌特性的分形参数加入到FLODIN等^[16]关于齿面磨损深度的研究方法中,可以得到主动轮和从动轮齿面的磨损深度 W 的表达式,即

$$W_{i,q} = W_{i,q-1} + 2a_H k P \left| \frac{v_p - v_g}{v_i} \right| + W_{\zeta'} \quad (4)$$

式中, q 为迭代次数; i 根据情况,可分别指代p、g,分别表示主动轮、从动轮; a_H 为啮合点的赫兹接触宽度; k 为磨损系数; v 为啮合点处的滚动速度,下标p、g分别代表主动轮和从动轮; P 为啮合点处的接触载荷,具体计算方法可参考文献[17]; $W_{\zeta'}$ 为黏着磨损量, $W_{\zeta'} = \zeta' a_H k P$,其中, ζ' 为黏着磨损系数。

图6所示为齿轮工作时长和转速对主、从动轮整体磨损深度 b_w 的影响。在转速恒定时,随着齿轮工作时长的增加,齿面磨损深度逐渐增大;在相同工

作时长下, 齿轮转速的增加将加重齿面磨损。需要说明的是, 磨损深度在轮齿节线处最小, 其值基本为0。这是由于节线处主、从动轮的滑动速度相等, 理论上不发生摩擦磨损。因此, 本文将在粗糙齿面

的基础上进一步对齿隙值进行修正, 修正后的齿隙值由初始齿隙 b_0 、微凸体高度修正齿隙值 b_j 及主、从动轮整体齿面磨损深度 b_w 构成。综上, 主、从动轮之间的综合齿隙 $b(t) = b_0 - b_j + b_w$ 。

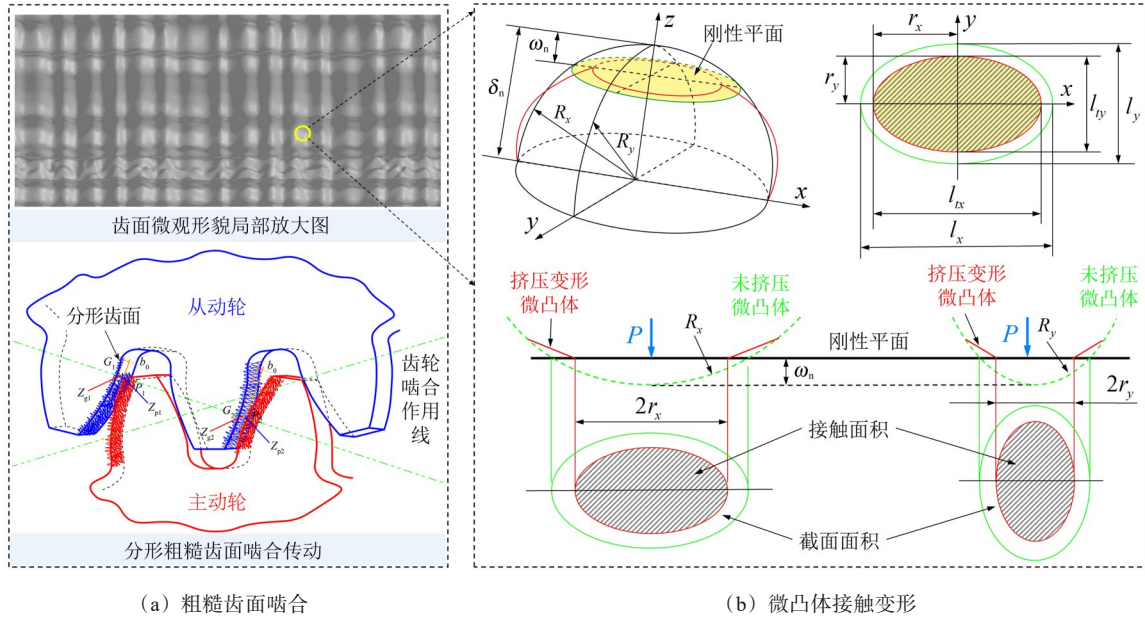


图4 三维粗糙齿面啮合时的微观传动示意图

Fig. 4 Schematic diagram of microscopic transmission of 3D rough tooth surface meshing

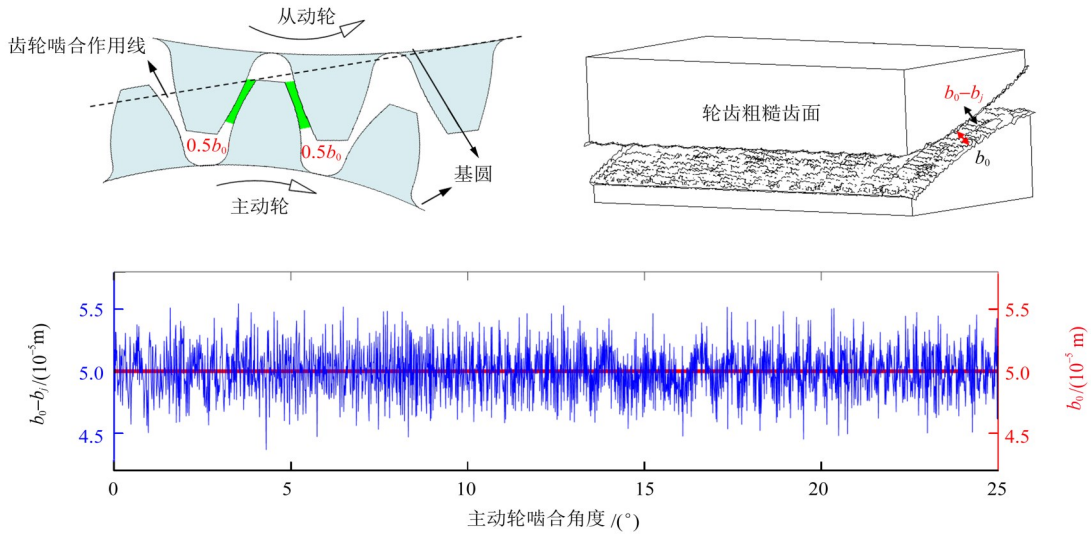


图5 齿面微观形貌对齿侧间隙的影响

Fig. 5 Influence of tooth micromorphology on tooth backlash

根据 LEI 等^{[14][180]} 的研究, 齿轮运行一定时长后, 齿面分形参数的变化是十分轻微的, 尤其是分形维数 D 的变化更小。同时, 结合前期的研究结果可知, 相比于分形维数的变化, 分形参数中特征尺度系数对齿轮传动系统内激励参数和最终的动态响应特性的影响都较为微弱。因此, 仅研究齿轮磨损对齿侧间隙、啮合刚度等的影响, 而不再考虑在正常磨损过程中齿面分形参数的细微变化。将图6所示的齿面磨损深度与齿面形貌等融合, 便可以得到磨损后的

综合齿隙, 如图7所示。

2.2 时变啮合刚度的计算

时变啮合刚度是齿轮传动系统的主要激励因素之一, 影响着系统动力学特性的表现。势能法是求解时变啮合刚度的常用方法, 它根据材料力学和弹性力学知识, 将时变啮合刚度分解为轴向压缩刚度 k_a 、弯曲刚度 k_b 、剪切刚度 k_s 、基体变形刚度 k_f 及赫兹接触刚度 k_h 进行求解^[18], 但该方法基于齿面完全光滑的理想状态。在利用分形理论建立三维分形齿

面后,微观上的齿面接触实际上是微凸体之间的挤压与滑动,导致齿面实际接触面积明显小于理论接触面积,所以,传统的赫兹接触刚度不再适用。本

文建立了齿轮副三维各向异性分形齿面接触模型,并基于此模型计算了不同磨损程度下的分形齿面接触刚度。

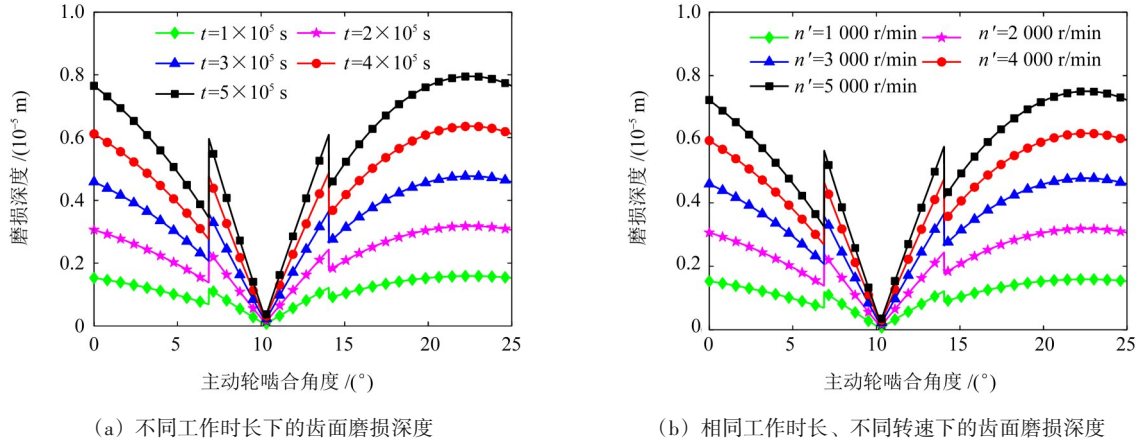


图6 分形参数对齿面磨损深度的影响

Fig. 6 Influence of fractal parameters on tooth wear depth

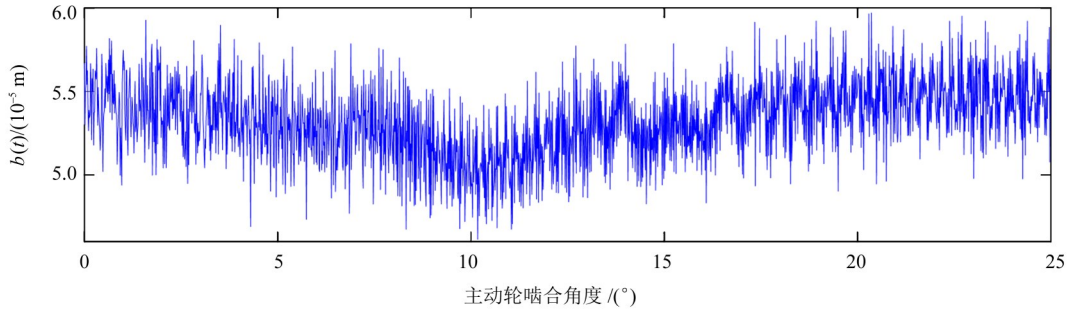


图7 磨损齿面综合齿侧间隙

Fig. 7 Comprehensive backlash on worn tooth surfaces

在计算具有分形特征的接触刚度时,通常可以将1对齿轮之间的弹性接触问题转化为具有等效曲率半径和等效弹性模量的弹性圆柱与刚性平面的接触^{[13]104366},如图4(b)所示。其中, P 为刚体平面施加在椭圆微凸体上的法向接触载荷; δ_n 为椭圆微凸体的高度; ω_n 为椭圆微凸体的实际变形量,取值范围为 $(0, \delta_n)$ 。由式(1)可以得到以椭圆的长轴和短轴为基底的微凸体的轮廓曲线 $z(x, y)$,即

$$z(x, y) = G_x^{D_x-1} l_x^{2-D_x} \cos\left(\frac{2\pi x}{l_x}\right) + G_y^{D_y-1} l_y^{2-D_y} \cos\left(\frac{2\pi y}{l_y}\right) \quad (5)$$

式中, l_x 、 l_y 分别为接触平面椭圆的长轴、短轴的长度。

单个椭圆微凸体的接触面积 a 为

$$a = \pi r_x r_y = \pi r_x^2 (1 - e^2)^{1/2} = \pi r_y^2 (1 - e^2)^{-1/2} \quad (6)$$

式中, r_x 、 r_y 分别为接触平面椭圆的长、短半轴长; e 为椭圆微凸体接触的偏心率。当微凸体的变形达到临界变形 δ_c 时,临界接触面积 a_c 的表达式为

$$a_c = \frac{6P}{K\sigma_s} \quad (7)$$

式中, K 为与微凸体材料硬度相关的系数; σ_s 为材料的屈服强度。

微凸体的最大接触面积为

$$a_1 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3Pl_{\max}^{D_x}}{4E^* \sqrt{\pi} G_x^{D_x-1}} \right)^{2/3} + \left(\frac{3Pl_{\max}^{D_y}}{4E^* \sqrt{\pi} G_y^{D_y-1}} \right)^{2/3} \right] \quad (8)$$

式中, E^* 为材料的等效弹性模量; $l_{\max}^{D_x}$ 、 $l_{\max}^{D_y}$ 分别为压缩后接触平面椭圆的 x 方向、 y 方向轴的最大长度。

令 $l_{\max} = \max\{l_{\max}^{D_x}, l_{\max}^{D_y}\}$,则

$$l_{\max} = 1/\gamma_{\min}^n \quad (9)$$

齿轮副分形齿面接触面积分布函数 $n'(a)$ 可表示为

$$n'(a) = \frac{\zeta(D_x + D_y)}{2} \frac{a^{\zeta(D_x + D_y)/2}}{a^{\zeta(D_x + D_y)/2 + 1}} \quad (10)$$

式中, ζ 为椭圆微凸体的接触系数, $\zeta = \frac{1}{2} (1 - e^2)^{1/2}$ 。

当椭圆微凸体处于完全弹性变形阶段时,可以计算得到法向接触刚度^[19]。关于齿面非均匀磨损对轴向压缩刚度 k_a 、弯曲刚度 k_b 、剪切刚度 k_s 和总体时变啮合刚度 k' 的计算见文献[20]。

不同磨损程度下齿轮啮合刚度的计算结果如

图8所示。由图8(a)可知, 当主动轮转速恒定在3 000 r/min时, 随着齿轮工作时长的增加, 啮合刚度逐渐减小; 由图8(b)可知, 按照不同的转速工作 3×10^5 s后, 转速越高的齿轮的啮合刚度越小。这是由于随着齿轮工作时长、转速的不断增加, 齿面磨损深度逐渐增加。磨损程度的加重将导致轮齿弯曲刚度、剪切刚度及压缩刚度减小^[21-22], 从而导致总体时变啮合刚度减小。

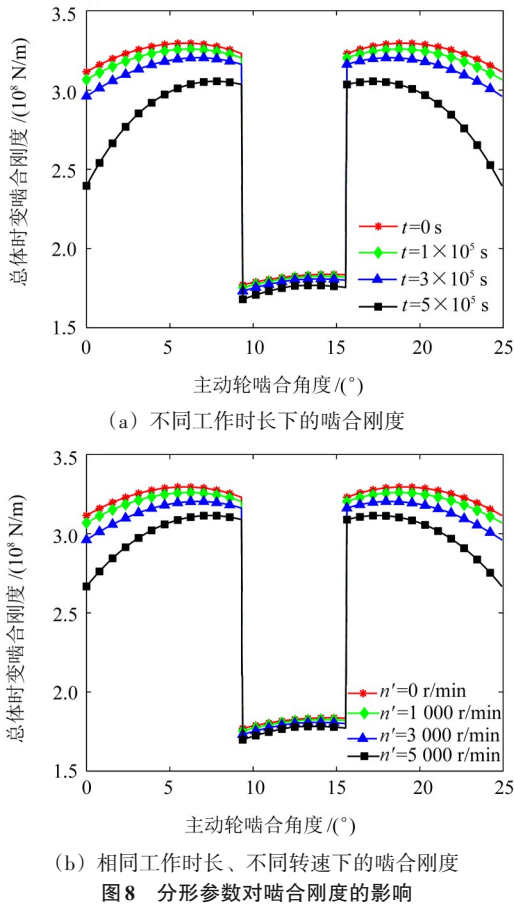


图8 分形参数对啮合刚度的影响

Fig. 8 Influence of fractal parameters on meshing stiffness

3 齿轮系统动力学响应分析

3.1 考虑齿面微观形貌的齿轮系统动力学模型

图9所示为基于集中质量法建立的考虑分形齿面的6自由度齿轮系统动力学模型。图9中, O_p 、 O_g 分别为主、从动轮的中心; r_{bp} 、 r_{bg} 分别为主、从动轮的基圆半径; T_p 、 T_g 分别为输入转矩和负载; I_p 、 I_g 分别为主、从动轮的转动惯量; m_p 、 m_g 分别为主、从动轮的质量; k_p 、 k_g 分别为主、从动轮的支承刚度; c_p 、 c_g 分别为主、从动轮的支承阻尼; 下标 x 、 y 分别表示物理量在 x 、 y 方向上的分量。

本文研究的重点是探究考虑齿面微观形貌的轮齿在不同工作时长下系统动态响应的变化情况。因此, 需要将由于齿面形貌、磨损所带来的对系

统内激励参数的影响代入文献[13]^[104366]中的动力学方程中; 由齿面磨损导致的轮齿质量的微小改变则被考虑在动力学模型中。为了更好地研究齿面磨损对系统动态响应的影响, 对动力学模型进行无量纲化, 无量纲化后的动力学方程可参见文献[13]^[104366]。本文中设定的模型参数值为: $b_0 = 50 \mu\text{m}$, 初始传动误差值 $e_0 = 25 \mu\text{m}$, $\xi = 0.07$, 摩擦因数 $\mu_1 = \mu_2 = 0.1$, $c_{px} = c_{gx} = c_{py} = c_{gy} = 3 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{s/m}$, $k_{px} = k_{gx} = k_{py} = k_{gy} = 6 \times 10^8 \text{ N/m}$, $T_p = T_g = 100 \text{ N}\cdot\text{m}$ 。前文中已求解出分形齿面时变啮合刚度 k' 与齿侧间隙 $b(t)$ 。将不同磨损程度下的齿隙和啮合刚度代入6自由度动力学模型中, 采用4/5阶 Runge-Kutta 算法求解动力学方程。

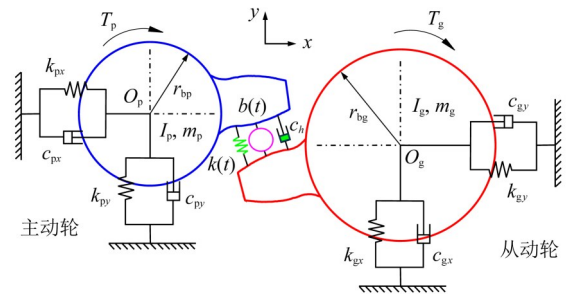


图9 齿轮传动系统动力学模型

Fig. 9 Dynamic model of the gear transmission system

3.2 考虑齿面微观形貌的动态响应特性

在实际工作中, 转速 n 会根据传动需要而改变, 因此, 有必要研究转速对齿轮传动系统动力学特性的影响。将转速作为变量参数, 可得到在主动轮的不同转速下系统丰富的动力学特性, 如图10所示。当转速小于3 780 r/min时, 系统始终处于单周期运动状态; 受固有频率影响, 当转速约为2 650 r/min时, 系统响应发生跳跃现象; 当转速在3 780~5 220 r/min范围内时, 系统处于倍周期运动状态。随着转速的增加, 齿轮系统由倍周期分岔变为混沌运动; 直到转速增至8 300 r/min时, 系统由逆倍周期分岔方式过渡回单周期运动。

为了更清楚地分析齿轮系统的动态响应, 绘制了不同转速下的时域图、相位图、Poincaré映射和快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform, FFT)频谱图, 如图11所示。图11中, 相位图和Poincaré映射中的速度为动态传递误差对时间的导数; FFT频谱图中的幅值为动态传递误差频谱的幅值。由于在动态响应求解时进行了无量纲化处理, 此处结果不再添加单位。图11(a)所示为齿轮系统在转速为2 000 r/min下的响应结果, 此时, 时域图出现稳定的周期波动, 但在每个周期内还存在幅值较小的波动; 相位轨迹为1条具有复杂形状且多次交叉的闭合曲线带; Poincaré映射

中有1个点,这表明在1个周期内还存在着一定的周期性,但是并不对主要的周期产生太大影响;在FFT频谱图中, ω_c 为啮合频率,该频率占主导地位,对应于幅值较大的单周期;而频率 $2\omega_c$ 对应于每个周期期间的较小幅值冲击。因此,系统在转速为2 000 r/min下处于类单周期运动状态。图11(b)所示为系统在转速为4 000 r/min下的响应结果,此时,FFT频谱图中

$0.5\omega_c$ 处出现峰值;相位轨迹每2个周期重复1次;Poincaré映射有2个点;时域图中显示出周期性波形。因此,系统处于2周期运动状态。图11(c)所示为系统在转速为6 000 r/min下的混沌运动状态,此时,Poincaré映射中出现了由无数个离散点组成的点群;相位轨迹纠缠无序;时域图中系统响应信号表现为振幅跳跃的非周期运动;FFT频谱图中出现连续的

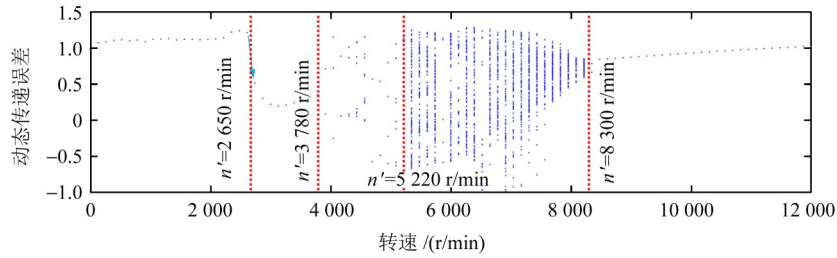


图10 不同转速下齿轮传动系统的动态响应分岔图

Fig. 10 Bifurcation diagram of dynamic responses of the gear transmission system under different rotational speeds

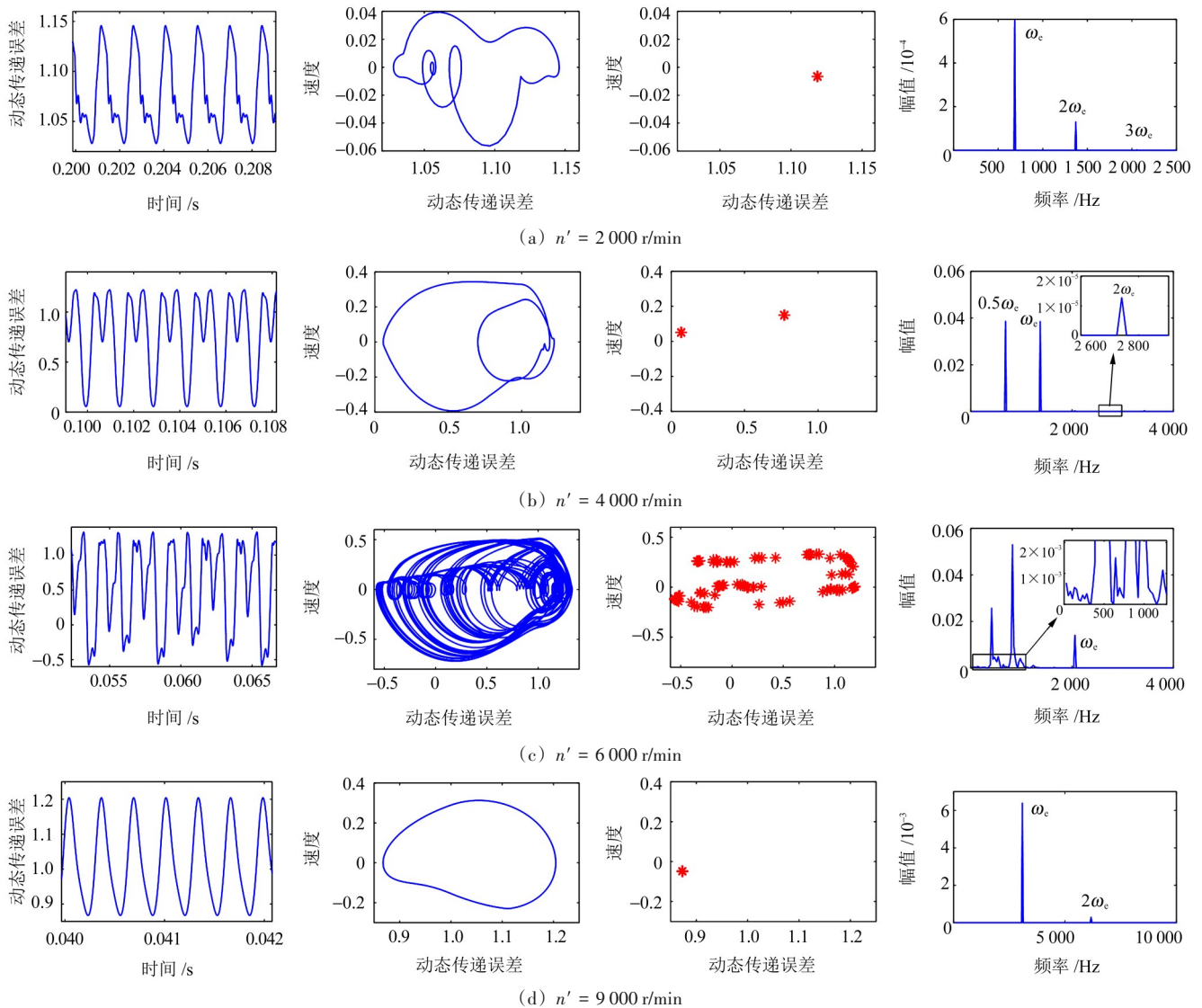


图11 粗糙齿轮系统不同转速时的时域图、相位图、Poincaré映射和FFT频谱图

Fig. 11 Time-domain diagrams, phase diagrams, Poincaré maps and FFT spectrum diagrams of the rough gear system at different rotational speeds

频率分量。图 11(d)所示为系统在转速为 9 000 r/min 下的响应结果, 此时, 齿轮系统处于单周期运动状态, 时域图中周期性明显; 相位轨迹呈现为 1 条封闭的曲线带; Poincaré 映射存在 1 个点; FFT 频谱图中频率以啮合频率 ω_c 及其倍频为主。

3.3 齿面磨损后的齿轮系统动态响应

为了研究轮齿齿面磨损对齿轮传动系统动态响应的影响, 设定主动轮转速为恒定转速 5 000 r/min, 其他工况不变。根据式(4)获取不同运行时长下的时变啮合刚度、齿隙等内激励参数, 并代入动力学模型中, 求解不同磨损程度下的动力学响应, 结果如图 12 所示。由图 12 可知, 随着齿轮工作时长的增加, 系统表现出丰富的动态响应特性, 这表明齿面

磨损对齿轮传动系统的动态响应有明显的影 响。通过对不同工作时长下的动态响应相图和 Poincaré 映射图的分析可以发现, 系统从刚开始时的周期运动状态逐渐过渡至类周期运动状态, 然后发展为混沌运动状态。在齿轮工作时长达到 3.8×10^6 s 时, 系统经历响应激变, 由混沌运动状态转变为较为稳定的 3 周期运动状态。此后, 随着工作时长的增加, 系统响应一直处于周期运动状态或类周期运动状态, 直至工作时长达到 8.2×10^6 s 时, 系统由于齿面过于严重的磨损而再次转变为混沌运动状态。同时, 观察分岔图中动态传递误差幅值(图 12)可以发现, 随着工作时长(磨损深度)的增加, 传递误差幅值增大, 将降低齿轮传动系统的传递精度, 增大系统振动噪声。

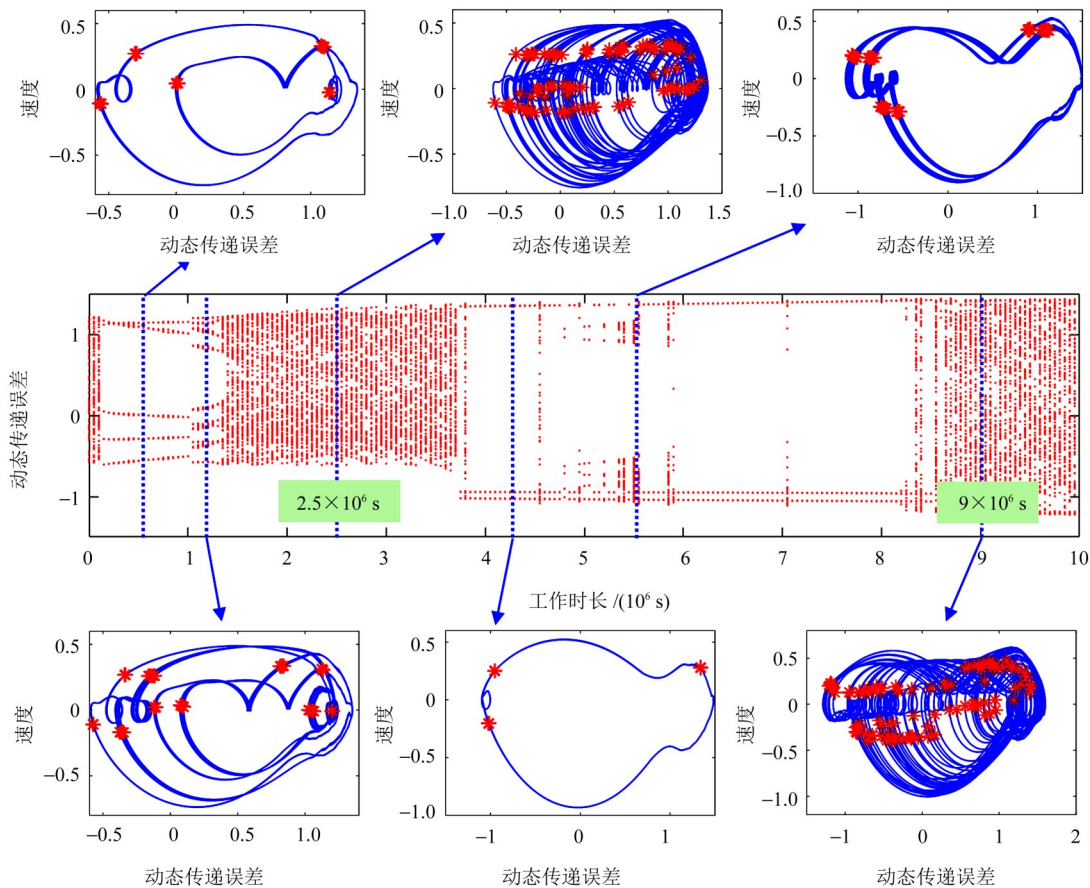


图 12 转速为 5 000 r/min 时, 系统在不同工作时长下的动态响应分岔图

Fig. 12 Bifurcation diagram of system dynamic responses at different operation durations under the rotational speed of 5000 r/min

混沌运动状态往往代表系统处于剧烈的抖动之中, 其运行平稳性将大大降低, 在实际工程中应尽可能避开混沌运行区域。选择混沌运动较为集中的齿轮磨损状态(运行时间为 2.5×10^6 s), 对其在更多工况下的参数进行研究, 探究在该磨损程度下其他参数对齿轮传动系统动态响应的影响。图 13 为磨损齿轮传动系统的转速分岔图。由图 13 可知, 原本在转速为 5 000 r/min 时处于混沌运动状态的磨损

齿轮传动系统在不同转速下表现出不同的动态运动状态。在转速为 3 000 r/min 和 6 260 r/min 时, 系统由混沌运动状态转变为较为稳定的周期运动状态; 而在转速为 8 000 r/min 时, 系统状态转变为更加杂乱无章的混沌运动状态。这表明, 对于一定磨损程度的齿轮, 改变转速可以使原本处于不稳定运动状态的传动系统的状态转变为稳定的周期运动状态。

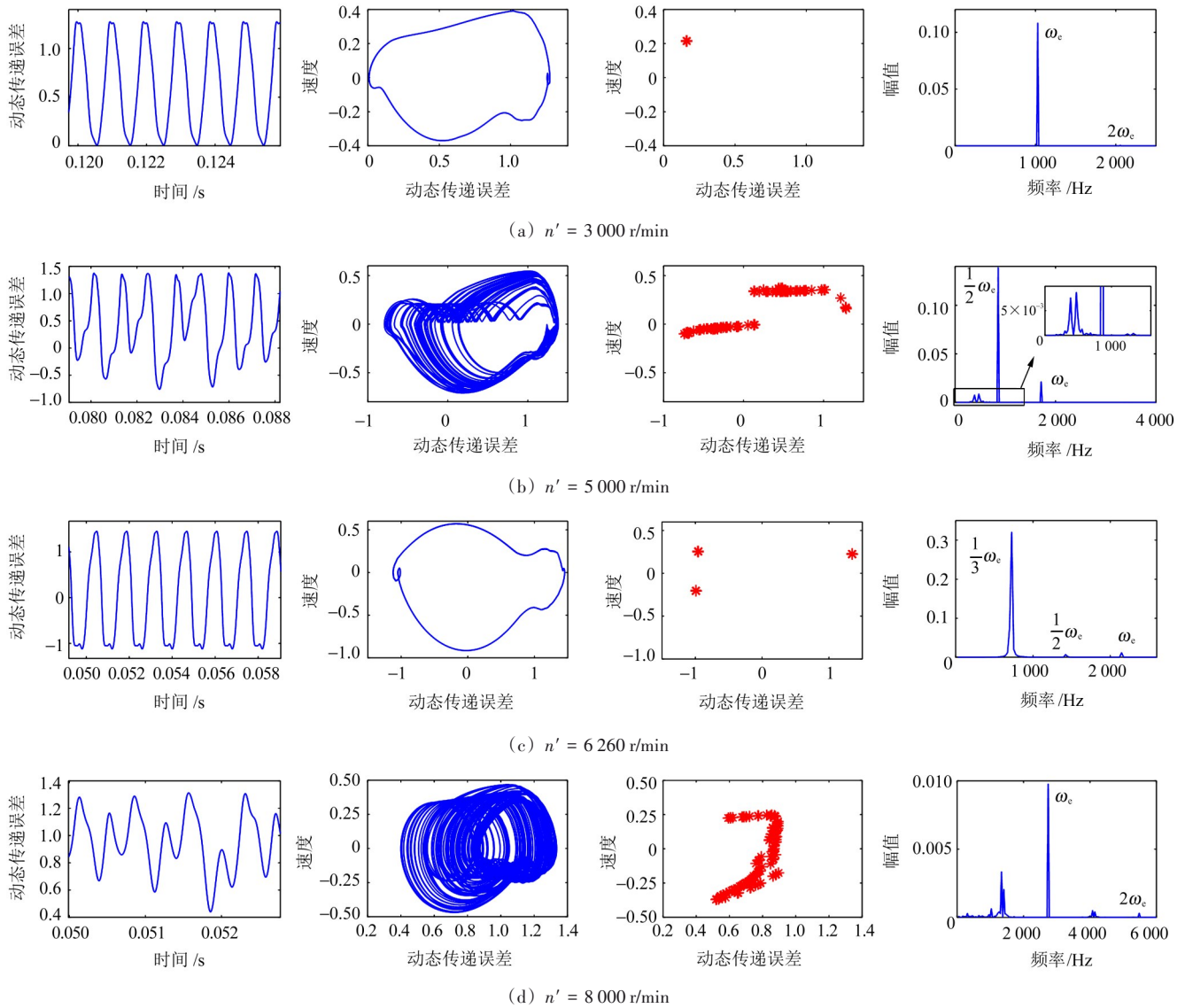


图13 磨损齿轮传动系统的转速分岔图

Fig. 13 Rotational speed bifurcation diagrams of the transmission system of the worn gear

同样,保持转速为5000 r/min不变、磨损状态(运行时间为 2.5×10^6 s)不变,对齿轮传动系统在不同转矩下的动态响应进行研究,结果如图14所示。由图14可知,当转矩为100 N·m时,齿轮传动系统处于混沌运动状态;改变转矩将会影响系统的运动状态,在将转矩分别增大至180、210、280 N·m后,系统均处于较为稳定的周期运动状态。这表明,对于由磨损导致的齿轮传动系统剧烈振动这一情况,可以根据实际齿轮服役时的传动需要,在保持其余工况不变的情况下改变转矩,从而使磨损后的齿轮传动系统重回较为稳定的周期运动状态。

上述研究表明,对于由齿面磨损导致的齿轮传动系统处于不稳定的运动状态这一情况,可以通过改变转矩或转速使其重新恢复到稳定的运动状态,从而延长正常磨损齿轮的使用寿命。

最后,为了确保动力学模型的正确性,将其结果与KUBO^{[23]77-84}、MALIHA等^{[24]534-541}的研究结果进行对比验证。在将轮齿参数、齿面形貌及啮合刚度等参数按照文献[25]中的数值进行设置后,得到图15所示的动态因子对比结果。由图15可知,相比MALIHA等^{[24]534-541}得到的针对光滑齿面的结果,本文提出的粗糙齿面动力学模型的结果与KUBO^{[23]77-84}的试验结果具有更好的一致性。这表明,所提出的动力学模型具有更高的精度,且更能准确反映实际齿轮传动系统的动态响应行为,从而验证了模型的正确性。

本节从动力学角度探究了考虑齿面微观形貌的齿轮在不同工作时长下传动系统运动状态的变化,研究了不同工况参数对磨损齿轮的动态响应的影响,研究结果可为不同磨损程度下齿轮的适用工况的选择提供参考。

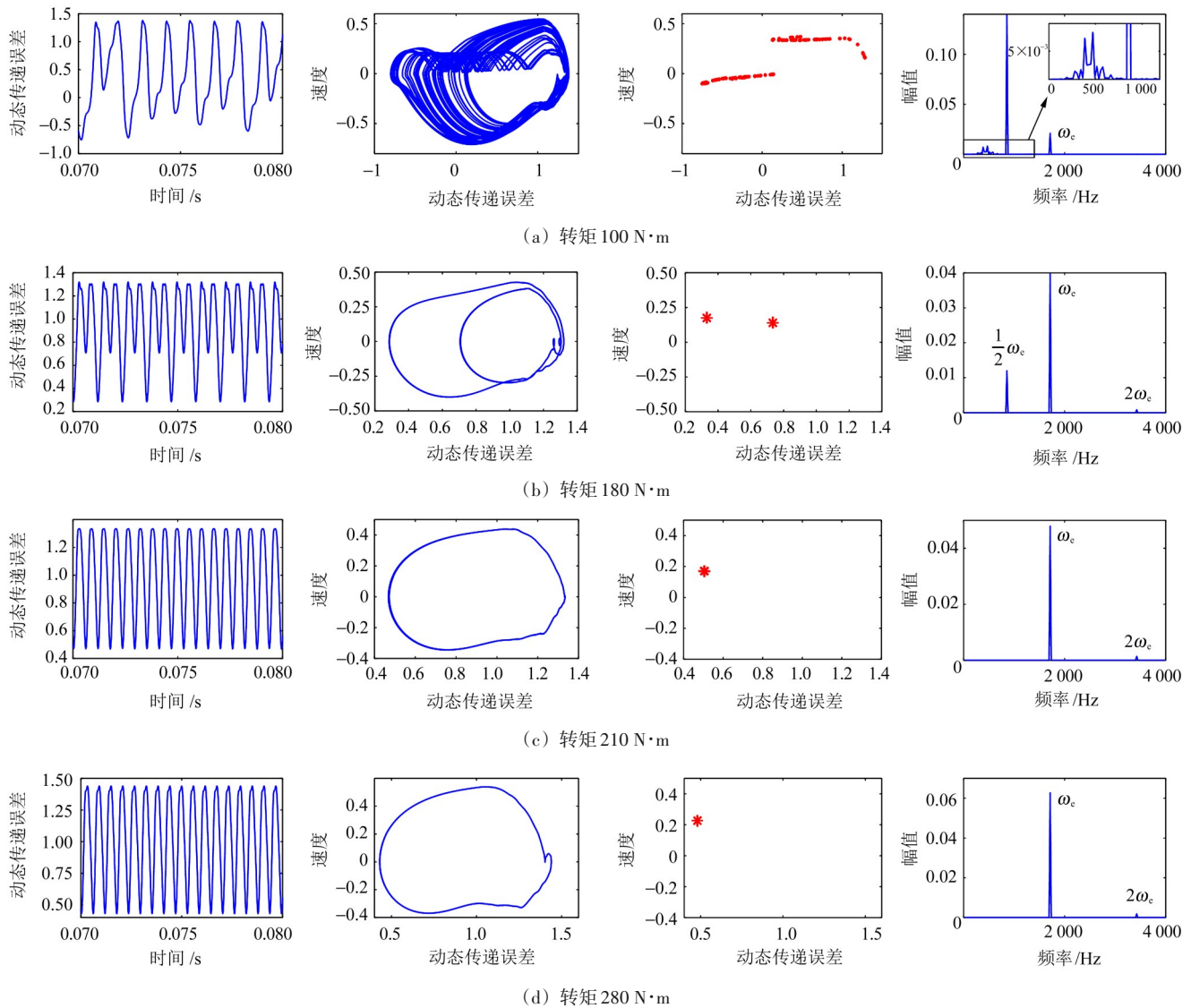


图14 磨损齿轮传动系统的转矩分岔图

Fig. 14 Torque bifurcation diagrams of the transmission system of the worn gear

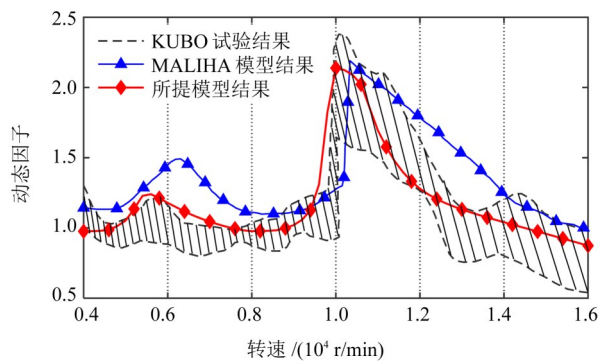


图15 所提模型与KUBO试验及MALIHA模型的结果对比

Fig. 15 Comparison of the results from the proposed model with those from the KUBO test and MALIHA model

4 结论

利用分形几何理论, 建立了各向异性三维粗糙齿面模型, 研究了粗糙齿面磨损对齿隙和时变刚度的影响。采用集中质量法建立了考虑齿面形貌的6自

由度齿轮非线性动力学模型, 采用变步长积分法求解了齿面形貌及磨损程度对系统动力学响应特性的影响。得到的主要结论如下:

- 1) 将二维M-B分形曲线在 x 方向和 y 方向叠加, 可以构建各向异性的三维分形粗糙表面; 通过调整不同方向的分形参数, 可以实现对具有特定微观形貌的齿面的模拟。
- 2) 随着磨损时间的增加和转速的提高, 齿面磨损程度加重, 时变啮合刚度减小, 齿隙增大。刚度的减小量和齿隙的增大量均在轮齿节线处达到最值, 这是由于节线处主、从动轮的相对滑动速度最小。
- 3) 随着齿轮转速的增大, 系统稳定性降低; 齿轮系统通过倍分岔的方式由单周期运动状态变为2周期、4周期运动状态, 直至混沌运动状态。
- 4) 随着轮齿工作时长的增加, 齿轮系统的运动状态逐渐发生变化, 可以通过调整转速或转矩来避

开不稳定的混沌运动状态,提高齿轮系统的传动质量。

参 考 文 献

- [1] 田晓青,李正兴,韩江,等. 基于齿轮时变啮合过程的修形齿面设计方法研究[J]. 机械传动,2023,47(2):70-78.
TIAN Xiaoqing, LI Zhengxing, HAN Jiang, et al. Research on the design method of the modified gear tooth surface based on the gear time-varying meshing process [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2023, 47(2): 70-78.
- [2] 卢凯文. 齿面磨损对直齿轮传动系统动态特性的影响研究[D]. 青岛:青岛理工大学,2022:1-2.
LU Kaiwen. Study on dynamic characteristics of spur gear transmission system with tooth surface wear [D]. Qingdao: Qingdao University of Technology, 2022: 1-2.
- [3] 王凯达,张瑞亮,王铁,等. 齿面磨损及轴承间隙对齿轮动力学的影响研究[J]. 机械传动,2019,43(9):15-21.
WANG Kaida, ZHANG Ruiliang, WANG Tie, et al. Research of the influence of tooth surface wear and bearing clearance on gear dynamics [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2019, 43(9): 15-21.
- [4] HAN J, LI G H, TIAN X Q, et al. Nonlinear dynamics analysis of gear transmission system based on tooth surface microtopography [J]. Journal of Vibration Engineering & Technologies, 2024, 12(2): 1753-1772.
- [5] MAJUMDAR A, BHUSHAN B. Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of surfaces [J]. Journal of Tribology, 1990, 112(2): 205-216.
- [6] 陈奇,李浩,王亚东,等. 齿面形貌对动力学特性的影响规律研究[J]. 机械传动,2019,43(1):5-9.
CHEN Qi, LI Hao, WANG Yadong, et al. Research of the effect of tooth surface topography on dynamics characteristic [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2019, 43(1): 5-9.
- [7] YU X, SUN Y Y, LI H G, et al. Nonlinear characteristics of gear pair considering fractal surface dynamic contact as internal excitation [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2022, 143: 104027.
- [8] ZHAO Z F, HAN H Z, WANG P F, et al. An improved model for meshing characteristics analysis of spur gears considering fractal surface contact and friction [J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 158: 104219.
- [9] LI Z X, PENG Z. Nonlinear dynamic response of a multi-degree of freedom gear system dynamic model coupled with tooth surface characters: a case study on coal cutters [J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 84(1): 271-286.
- [10] HUANG K, CHENG Z B, XIONG Y S, et al. Bifurcation and chaos analysis of a spur gear pair system with fractal gear backlash [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2021, 142: 110387.
- [11] LAN G S, SUN W, ZHANG X L, et al. A three-dimensional fractal model of the normal contact characteristics of two contacting rough surfaces [J]. AIP Advances, 2021, 11(5): 055023.
- [12] XIA H, MENG F S, ZHANG X, et al. Nonlinear dynamics analysis of gear system considering time-varying meshing stiffness and backlash with fractal characteristics [J]. Nonlinear Dynamics, 2023, 111(16): 14851-14877.
- [13] MENG F S, XIA H, ZHANG X, et al. Study on nonlinear dynamic characteristics of gear system with 3D anisotropic rough tooth surface based on fractal theory [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2023, 150: 104366.
- [14] LEI Q A, YUAN L, YU X, et al. Experimental-based study of gear vibration characteristics incorporating the fractal topography of tooth surface [J]. International Journal of Mechanical System Dynamics, 2023, 3(2): 173-182.
- [15] LI Z F, ZHU L Y, CHEN S Q, et al. Study on safety characteristics of the spur gear pair considering time-varying backlash in the established multi-level safety domains [J]. Nonlinear Dynamics, 2022, 109(3): 1297-1324.
- [16] FLODIN A, ANDERSSON S. Simulation of mild wear in spur gears [J]. Wear, 1997, 207(1/2): 16-23.
- [17] PAN W J, LING L Y, QU H Y, et al. Early wear fault dynamics analysis method of gear coupled rotor system based on dynamic fractal backlash [J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2022, 17(1): 011003.
- [18] LI Z F, CHEN Z G, ZHAI W M. Nonlinear dynamic characteristics of a spur gear pair considering extended tooth contact and coupling effect between gear neighboring teeth [J]. Nonlinear Dynamics, 2023, 111(3): 2395-2414.
- [19] YU G B, MAO H C, JIANG L D, et al. Fractal contact mechanics model for the rough surface of a beveloid gear with elliptical asperities [J]. Applied Sciences, 2022, 12(8): 4071.
- [20] MENG F S, XIA H, ZHANG X, et al. A new tooth pitting modeling method based on matrix equation for evaluating time-varying mesh stiffness [J]. Engineering Failure Analysis, 2022, 142: 106799.
- [21] 沈智宪,乔百杰,罗巍,等. 齿轮磨损故障动态响应特征与诊断指标研究[J]. 机械工程学报,2021,57(17):120-131.
SHEN Zhixian, QIAO Baijie, LUO Wei, et al. Research on dynamic response characteristics and condition indicators of gear wear fault [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2021, 57(17): 120-131.
- [22] CHEN W, LEI Y L, FU Y, et al. A study of effects of tooth surface wear on time-varying mesh stiffness of external spur gear considering wear evolution process [J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 155: 104055.
- [23] KUBO A. Stress condition, vibrational exciting force, and contact pattern of helical gears with manufacturing and alignment error [J]. Journal of Mechanical Design, 1978, 100(1): 77-84.
- [24] MALIHA R, DOĞRUER C U, ÖZGÜVEN H N. Nonlinear dynamic modeling of gear-shaft-disk-bearing systems using finite elements and describing functions [J]. Journal of Mechanical Design, 2004, 126(3): 534-541.
- [25] YI Y, HUANG K, XIONG Y S, et al. Nonlinear dynamic modeling and analysis for a spur gear system with time-varying pressure angle and gear backlash [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 132: 18-34.

Study on dynamic response characteristics of worn gears considering tooth micromorphology

MENG Fanshan¹ YI Wenhao¹ ZHANG Xin¹ JIN Yulin¹ WANG Jiayu²

(1. School of Mechanical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

(2. State Key Laboratory of Mechanical Transmission for Advanced Equipment, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: [Objective] To study the effect of tooth surface micromorphology on gear contact and operating conditions, the wear rate and dynamic response characteristics of anisotropic 3D rough tooth surface were investigated. [Methods] Firstly, an anisotropic 3D microscopic rough gear surfaces were established based on fractal geometry theory. Secondly, the non-uniform wear of these microscopic rough gear surfaces under different rotational speeds and operating durations was calculated according to Archard's theory. The wear depth of the gear surfaces was combined with gear dimensional parameters to solve for the time-varying meshing stiffness and backlash during the worn gear meshing, and they were used as internal excitation input parameters for the dynamic model of the gear transmission system. Lastly, the variable step-size Runge-Kutta algorithm was employed to solve the dynamic differential equations, thereby obtaining the dynamic response characteristics of the gear transmission system. [Results] The results indicate that, with the same tooth surface roughness, as the rotational speed and operating duration of the gears increase, the wear depth of the tooth surface and the tooth side clearance gradually increase, while the time-varying meshing stiffness gradually decreases. In gear transmission systems considering the micromorphology of tooth surfaces, the gear transmission system exhibits abundant dynamic response characteristics as the rotational speed changes. As the operating duration increases, the dynamic transmission error of the gear transmission system enlarges. The overall dynamic response of the system tends from periodic motion state to chaotic motion state, manifesting as chaotic vibrations, which are detrimental to the system's smooth operation. The gear transmission system transitions from chaotic motion state to relatively stable periodic motion state when the torque or rotational speed of worn gears in a chaotic motion state changes.

Key words: 3D rough tooth surface; Wear; Time-varying meshing stiffness; Backlash; Dynamic response characteristic

(编辑: 刘星泽)

(上接第 141 页)

Meshing performance analysis of non-backlash end-face roller enveloping cylindrical worm drive

WANG Kai¹ DOU Chenyang² CHEN Yonghong²

(1. College of Intelligent Manufacturing and Automotive, Chengdu Vocational & Technical College of Industry, Chengdu 610000, China)

(2. State Key Laboratory of Mechanical Transmission for Advanced Equipment, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: [Objective] Roller enveloping toroidal worm drives are widely used in computer numerical control (CNC) turntables but face challenges such as high error sensitivity and difficult installation. To solve these problems, a non-backlash end-face roller enveloping worm drive pair was proposed, achieving zero backlash by using one side for motion transmission and the other for clearance elimination. [Methods] Firstly, based on spatial meshing theory and differential geometry, the mathematical model of the non-backlash end-face roller enveloping worm drive was established. Secondly, mathematical expressions for meshing performance, including the meshing equation, contact lines, tooth surface equations, induced normal curvature, lubrication angle, and relative entrainment velocity, were derived. Finally, the influence of geometric parameters on meshing performance was analyzed using Matlab software. [Results] The results indicate that the theoretical meshing teeth of the proposed drive pair are 5 pairs, providing high load-carrying capacity. The lubrication angles of three or more pairs of meshing teeth are approximately 85° , indicating excellent lubrication performance. The induced normal curvatures of these teeth are below 0.25 mm^{-1} , suggesting a good fit of the conjugate tooth surfaces. This design provides a reliable basis for the development of high-precision CNC transmission systems.

Key words: End-face roller; Enveloping worm; Non-backlash meshing; Meshing performance

(编辑: 李立)