

考虑轴向分力的斜齿轮时变啮合刚度改进算法及影响因素研究

毛汉成 丁元伟 李旭伟 张冰倩

(黑龙江科技大学 机械工程学院, 哈尔滨 150022)

摘要:【目的】针对斜齿轮时变啮合刚度精确求解问题, 提出基于轴向力及切片思想的斜齿轮啮合刚度计算方法。【方法】将每一薄片齿轮简化为变截面悬臂梁, 通过受力分析加入新的轴向弯曲势能, 并对现有基于势能法的斜齿轮啮合刚度计算方法做了进一步修正, 提出一种刚度改进算法; 通过与有限元法、切片法对比分析, 验证了该改进算法的可行性; 在此算法基础上, 研究了螺旋角、压力角、齿数、齿宽等参数对啮合刚度的影响。【结果】结果表明, 传统势能法只适用于螺旋角较小的斜齿轮, 而改进算法适用于任意斜齿轮; 增大螺旋角, 可使齿轮传动愈加平稳; 压力角对时变啮合刚度均值影响较小; 齿宽对时变啮合刚度均值影响较大, 近似成线性关系; 中心距一定时, 齿数变化对时变啮合刚度均值影响较小, 齿数较多时, 啮合刚度波动值较小; 当轴向重合度接近整数时, 啮合刚度波动值最小。

关键词: 斜齿轮; 时变啮合刚度; 势能法; 轴向分力; 轴向弯曲刚度

中图分类号: TH132.413 **DOI:** 10.16578/j.issn.1004.2539.2026.03.011

0 引言

随着科技的不断发展, 齿轮传动已经成为系统动力学研究的重要组成部分。作为一种很广泛的动力传递形式, 对其性能的要求日益提升; 齿轮传动的力学行为和工作性能对设备的安全平稳运行具有重要影响, 而时变啮合刚度特性是改变振动噪声的主要因素, 其精确计算具有关键的工程价值。

在计算齿轮啮合刚度方面, 学者已进行大量研究, 常用的求解方法包括有限元法和解析法。YANG等^[1]使用势能法将齿轮啮合过程中的弹性势能分为赫兹势能、弯曲势能和轴向压缩势能。TIAN^[2]将剪切势能引入到势能法中, 求解齿轮啮合刚度。ZHOU等^[3]考虑基体变形, 改进了啮合刚度求解方法, 将总势能分成5部分。李亚鹏等^[4]考虑齿轮轮体变形, 在石川公式中加入轮体刚度, 改进了齿轮时变啮合刚度计算方法。CHEN等^[5]考虑齿形偏差, 分析直齿轮啮合刚度模型, 探究了齿轮齿根裂纹等对啮合刚度的影响。陈思宇等^[6]基于能量法求解单齿啮合刚度, 结合位移相容原理, 构建了齿轮时变啮合刚度高效计算模型。WANG等^[7]考虑齿根圆与基圆的错位, 将齿轮轮齿简化为齿根圆上的悬臂梁, 计算直齿轮时变

啮合刚度。LIANG等^[8]使用改进悬臂梁模型, 采用势能法研究了行星齿轮组啮合刚度。GU等^[9]分析圆柱直齿轮和斜齿轮时变啮合刚度, 提出其函数的近似公式。WANG等^[10]结合势能法, 建立了具有齿廓偏差的齿轮副啮合刚度模型。WAN等^[11]使用累积分势能法求解斜齿轮啮合刚度, 认为随着螺旋角或齿宽增大, 啮合刚度的波动程度变小。刘文等^{[12]~6}采用切片法将斜齿轮沿齿宽方向切分成若干直齿轮片, 使用积分思想推导并计算出斜齿轮啮合刚度。KARPAT等^[13]通过齿轮有限元接触分析, 建立了一种新的非对称渐开线直齿圆柱齿轮副啮合刚度计算方法。CHANG等^[14]将有限元法和局部接触分析相结合, 提出渐开线圆柱齿轮啮合刚度计算模型。HAN等^[15]结合切片法、势能法和积分法建立分析模型, 揭示了齿面剥落和局部破裂对斜齿轮啮合刚度的影响。YAN等^[16]将接触线分析与切片法相结合, 提出一种新的斜齿轮啮合刚度解析模型, 用来预测无量纲时变啮合刚度。YANG等^[17]改进势能法与传统切片法, 提出计算简单斜齿轮啮合刚度的新方法。刘子谦等^[18]通过分段计算刀具齿顶尖角形成的齿根过渡曲线及其渐开线起始点, 基于势能法提出斜齿轮啮合刚度修正算法。田晓青等^[19]考虑斜齿轮动力学模型

收稿日期: 2025-03-11

基金项目: 黑龙江省“揭榜挂帅”科技攻关项目(2023ZXJ04A02)

作者简介: 毛汉成, 男, 1990年生, 黑龙江哈尔滨人, 博士, 讲师; 主要研究方向为齿轮系统非线性动力学分析; maohancheng@usth.edu.cn。

引用格式: 毛汉成, 丁元伟, 李旭伟, 等. 考虑轴向分力的斜齿轮时变啮合刚度改进算法及影响因素研究[J]. 机械传动, 2026, 50(3): 89-97.

MAO Hancheng, DING Yuanwei, LI Xuwei, et al. Improved algorithm for time-varying meshing stiffness of helical gears considering axial force component and its influencing factors[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2026, 50(3): 89-97.



免费获取

中的啮合刚度未精确到整个齿面,提出一种计算啮合接触迹线上任意点啮合刚度的方法。ZHANG等^[20]考虑斜齿轮齿根圆与基圆不重合问题,对传统能量法进行改进,提高了正常斜齿轮与齿根裂纹故障斜齿轮的啮合刚度计算精度。

在上述研究成果中,对于斜齿轮啮合刚度的求解算法未考虑轴向分力的影响。由于斜齿轮存在螺旋角,作用在齿面上的法向载荷将部分力分解为轴向力,产生了轴向弯曲势能,对斜齿轮的时变啮合刚度产生影响。针对轴向力的存在进行受力分析,传统势能法中的剪切刚度和弯曲刚度公式需要进行修正。

本文重点研究了斜齿轮传动中轴向分力对啮合刚度的影响。首先,通过受力分析分别建立了新的剪切、弯曲和轴向弯曲刚度模型;其次,通过3种算例对斜齿轮副的啮合刚度模型进行验证分析,使计算得到的刚度值准确度得到提升;最后,研究了螺旋角、压力角、齿数、齿宽等参数对啮合刚度的影响。

1 基于势能法的斜齿轮啮合刚度计算模型

在传统情形下,采用势能法计算斜齿轮的时变啮合刚度时,齿轮的时变啮合刚度由5个部分构成,分别是赫兹接触刚度 k_h 、弯曲刚度 k_b 、剪切刚度 k_s 、轴向压缩刚度 k_a 和基体刚度 k_f 。依据材料力学和弹性力学,各部分的刚度和势能之间存在的关系可以表示为

$$U_h = \frac{F_n^2}{2k_h}, U_b = \frac{F_n^2}{2k_b}, U_s = \frac{F_n^2}{2k_s}, U_a = \frac{F_n^2}{2k_a}, U_f = \frac{F_n^2}{2k_f} \quad (1)$$

式中, U_h 、 U_b 、 U_s 、 U_a 和 U_f 分别为赫兹接触势能、弯曲势能、剪切势能、轴向压缩势能和基体势能; F_n 为啮合点处的法向啮合力。

由式(1)可以求出齿轮副中一对啮合轮齿的总势能 U ,其可表示为

$$U = \frac{F_n^2}{2k} = U_h + U_{b1} + U_{s1} + U_{a1} + U_{f1} + U_{b2} + U_{s2} + U_{a2} + U_{f2} = \frac{F_n^2}{2} \left(\frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_{b1}} + \frac{1}{k_{s1}} + \frac{1}{k_{a1}} + \frac{1}{k_{f1}} + \frac{1}{k_{b2}} + \frac{1}{k_{s2}} + \frac{1}{k_{a2}} + \frac{1}{k_{f2}} \right) \quad (2)$$

式中, k 为总刚度;下标1、2分别表示主动轮和从动轮。因此,一对啮合轮齿经啮入和啮出后,总刚度 k 可表示为

$$k = 1 / \left(\frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_{b1}} + \frac{1}{k_{s1}} + \frac{1}{k_{a1}} + \frac{1}{k_{f1}} + \frac{1}{k_{b2}} + \frac{1}{k_{s2}} + \frac{1}{k_{a2}} + \frac{1}{k_{f2}} \right) \quad (3)$$

分析斜齿轮副的时变啮合刚度通常采用切片法。将斜齿轮沿齿宽方向离散为多个等厚度的薄片直齿

轮,但每个薄片齿轮承受的法向啮合力均不相同。可采用势能法计算切片齿轮啮合刚度,通过积分叠加所有的薄片齿轮刚度分量,最终获得渐开线圆柱斜齿轮副的综合时变啮合刚度。

为了准确计算每个薄片齿轮的啮合刚度,每一个轮齿都可以看作一个变截面悬臂梁,在齿面载荷的作用下发生变形。如图1所示,将渐开线斜齿轮的轮齿简化为悬臂梁。其中, b 为斜齿轮宽度; Δl 为切片厚度; b_i 为切片 i 的轴向位置。

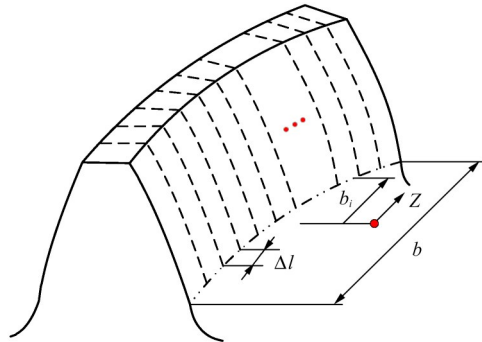


图1 斜齿轮切片模型

Fig. 1 Helical gear slicing model

根据图2所示的悬臂梁模型和材料力学理论,在渐开线坐标系中,齿轮任意啮合点 j 的径向距离为 r_j ,其轴向投影为 x_b ;渐开线起始点距基圆中心的轴向偏移量为 x_a ;齿轮的基圆半径和齿根圆半径分别为 r_b 和 r_f ;啮合点 j 处的半齿厚为 h_j ;每个薄片齿面上的法向啮合力为 F_{nj} ;每个薄片齿轮啮合力与齿轮中心线垂线方向的夹角为 α_1 ;基圆上的半齿角为 α_2 , $\alpha_2 = \pi/(2z) + \text{inv } \alpha_0$ 。其中, z 为主(从)动轮的齿数; α_0 为压力角,通常采用的压力角为 20° 。力 F_{nj} 在法面内可分解为 F_x 、 F_y ,其表达式为

$$\begin{cases} F_x = F_{nj} \cos \alpha_1 \\ F_y = F_{nj} \sin \alpha_1 \end{cases} \quad (4)$$

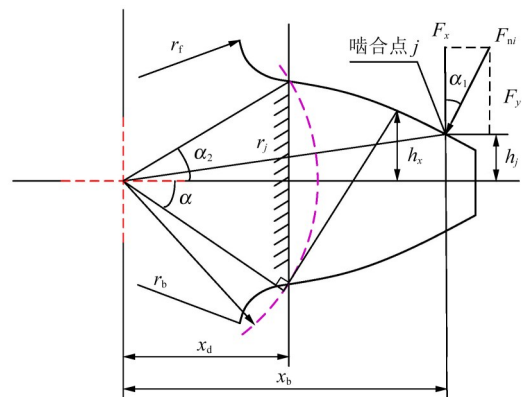


图2 斜齿轮轮齿简化成的悬臂梁截面

Fig. 2 Simplified cantilever beam section of the helical gear tooth

每个薄片齿轮存储的弯曲势能、剪切势能和轴向压缩势能可分别表示为

$$\begin{cases} U_b^i = \int_{x_d}^{x_b} \frac{[F_x(x_b - x) - F_y h_j]^2}{2EI_x} dx \\ U_s^i = \int_{x_d}^{x_b} \frac{1.2F_x^2}{2GA_x} dx \\ U_a^i = \int_{x_d}^{x_b} \frac{F_y^2}{2EA_x} dx \end{cases} \quad (5)$$

式中, E 为弹性模量; G 为剪切模量; I_x 、 A_x 分别为每个薄片齿轮渐开线上任意位置 x 处的截面惯性矩和横截面积。相关表达式为

$$\begin{cases} x_b = r_b[(\alpha_1 + \alpha_2)\sin\alpha_1 + \cos\alpha_1] \\ h_j = r_b[(\alpha_1 + \alpha_2)\cos\alpha_1 - \sin\alpha_1] \\ x = r_b[\cos\alpha - (\alpha_2 - \alpha_1)\sin\alpha_1] \\ h_x = r_b[(\alpha_2 - \alpha)\cos\alpha + \sin\alpha] \end{cases} \quad (6)$$

其中, $-\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ 。

将式(6)代入式(5), 则第 i 片薄片齿轮的弯曲刚度 k_b^i 、剪切刚度 k_s^i 、轴向压缩刚度 k_a^i 分别为

$$k_b^i = 1/\int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{3(\alpha_2 - \alpha)\cos\alpha}{2E y [\sin\alpha + (\alpha_2 - \alpha)\cos\alpha]^3} \times \frac{1 + \cos\alpha_1[(\alpha_2 - \alpha)\sin\alpha - \cos\alpha]^2}{2E y} d\alpha \quad (7)$$

$$k_s^i = 1/\int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1.2(1 + \nu)(\alpha_2 - \alpha)\cos\alpha\cos^2\alpha_1}{E[\sin\alpha + (\alpha_2 - \alpha)\cos\alpha] y} d\alpha \quad (8)$$

$$k_a^i = 1/\int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{(\alpha_2 - \alpha)\cos\alpha\sin^2\alpha_1}{2E[\sin\alpha + (\alpha_2 - \alpha)\cos\alpha] y} d\alpha \quad (9)$$

式中, y 为单个切片的有效接触面宽度, $y=l/n$, l 为有效接触面宽度; n 为切片数; ν 为泊松比。

第 i 片薄片齿轮的赫兹接触刚度和基体刚度可分别表示为

$$\frac{1}{k_h^i} = \frac{2U_h^i}{F_{ni}^2} = \frac{4(1 - \nu^2)}{\pi E y} \quad (10)$$

$$\frac{1}{k_f^i} = \frac{\cos^2\alpha_1}{E y} [L^* (\frac{u_f}{S_f})^2 + M^* (\frac{u_f}{S_f}) + P^* (1 + Q^* \tan^2\alpha_1)] \quad (11)$$

除轮齿变形外, 基体变形也会影响齿轮刚度, 该部分基体刚度如式(11)所示。式(11)中的 u_f 和 S_f 可分别表示为

$$u_f = r_b[(\alpha_1 + \alpha_2)\sin\alpha_1 + \cos\alpha_1] - r_f \quad (12)$$

$$S_f = 2r_f\theta_f \quad (13)$$

式(11)中的系数 L^* 、 M^* 、 P^* 、 Q^* 可由多项式近似为

$$X_i^*(h_{fi}, \theta_f) = A_i/\theta_f^2 + B_i h_{fi}^2 + C_i h_{fi}/\theta_f + D_i/\theta_f + E_i h_{fi} + F_i \quad (14)$$

式中, X_i^* 表示系数 L^* 、 M^* 、 P^* 、 Q^* ; $h_{fi}=r_f/r_{im}$ 。 r_{im} 、 θ_f 、 A_i 、 B_i 、 C_i 、 D_i 、 E_i 和 F_i 可参考文献[12]。

因此, 渐开线斜齿轮副啮合刚度可以通过5个刚

度量分量组合表示为

$$k_q = \sum_{i=1}^n k_q^i = \sum_{i=1}^n [1/(\frac{1}{k_{hi}^i} + \frac{1}{k_{bi1}^i} + \frac{1}{k_{si1}^i} + \frac{1}{k_{ai1}^i} + \frac{1}{k_{fi1}^i} + \frac{1}{k_{bi2}^i} + \frac{1}{k_{si2}^i} + \frac{1}{k_{a2}^i} + \frac{1}{k_{fi2}^i})] \quad (15)$$

2 斜齿轮时变啮合刚度改进算法

螺旋角是斜齿轮特有的参数, 是指斜齿轮齿面与轴线的夹角; 并且斜齿轮在旋转时会产生沿轴向的力, 即轴向分力。现有切片法中, 斜齿轮受力分析未充分考虑螺旋角与轴向分力的影响, 会使齿轮啮合刚度计算结果产生偏差。因此, 有必要对斜齿轮啮合刚度算法进行改进。

2.1 斜齿轮受力分析

圆柱直齿轮不存在螺旋角, 因此, 不存在轴向分力。而圆柱斜齿轮存在螺旋角, 有轴向分力 F_a 。如图3所示, 建立新的切片载荷分析模型, 载荷沿齿宽方向的“理想”垂直分布变为非垂直分布, 是带有角偏移的均匀分布。传统圆柱斜齿轮的时变啮合刚度模型只考虑垂直齿宽方向上的法向载荷 F'_n , 而忽略了螺旋角 β 对载荷力的影响。

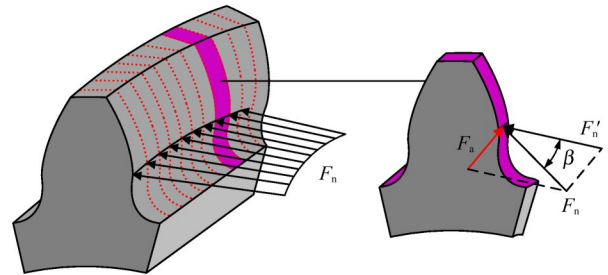


图3 考虑螺旋角的齿轮载荷分配

Fig. 3 Gear load distribution considering the helix angle

图4为斜齿轮副的受力分析图。首先, 将力 F_n 在法面内分解成指向轮心的径向力 F_r 和 F' ; 然后, 将力 F' 分解成圆周力 F_t 和轴向力 F_a 。因此, 啮合过程中齿轮的 F_r 、 F_t 和 F_a 可分别表示为

$$\begin{cases} F_r = F_n \sin\alpha_1 \\ F_t = F_n \cos\alpha_1 \cos\beta \\ F_a = F_n \cos\alpha_1 \sin\beta \end{cases} \quad (16)$$

2.2 剪切刚度和弯曲刚度的改进算法

由弯曲刚度、剪切刚度公式可知, 径向力和切向力会对 k_b 和 k_s 产生影响。将上述受力分析得到的 F_r 和 F_t 代入式(5), 即可得到考虑轴向分力后的剪切刚度和弯曲刚度表达式, 从而提高齿轮啮合刚度的求解精度。

因此, 第 i 片薄片齿轮的弯曲刚度 k_{bi}^i 和剪切刚度 k_{si}^i 可分别表示为

$$k_{b1}^i = 1 / \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{3(\cos\beta - 1)(\alpha_1 + \alpha_2)\sin\alpha_1 \cos\alpha_1 + \sin^2\alpha_1}{2Ey [\sin\alpha + (\alpha_2 - \alpha)\cos\alpha]^3} + \frac{[\cos\alpha_1 - \cos\alpha + (\alpha_2 - \alpha)\sin\alpha] \cos\alpha_1 \cos\beta}{2Ey [\sin\alpha + (\alpha_2 - \alpha)\cos\alpha]^3} d\alpha \quad (17)$$

$$k_{s1}^i = 1 / \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1.2(1 + \nu)(\alpha_2 - \alpha)\cos\alpha \cos\beta \cos^2\alpha_1}{Ey [\sin\alpha + (\alpha_2 - \alpha)\cos\alpha]} d\alpha \quad (18)$$

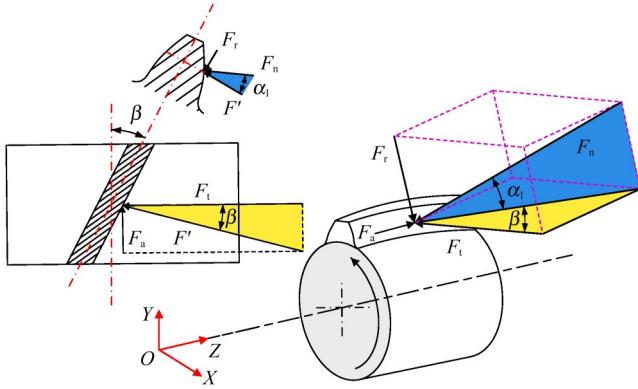


图4 齿轮副受力分析图

Fig. 4 Force analysis diagram of the gear pair

2.3 轴向弯曲刚度

建立存在轴向分力的齿轮切片刚度模型，在外载荷 F_i 作用下，被切齿轮产生弹性变形，如图5所示。图5中， k_g^i 、 k_h^i 均为切片刚度，包括弯曲刚度、剪切刚度、轴向压缩刚度和基体刚度； k_h^i 为齿轮副中切片接触产生的赫兹接触刚度；轴向分力 F_a 使斜齿轮切片沿轴向方向发生弯曲变形，从而产生轴向弯曲刚度 k_{af}^i 。

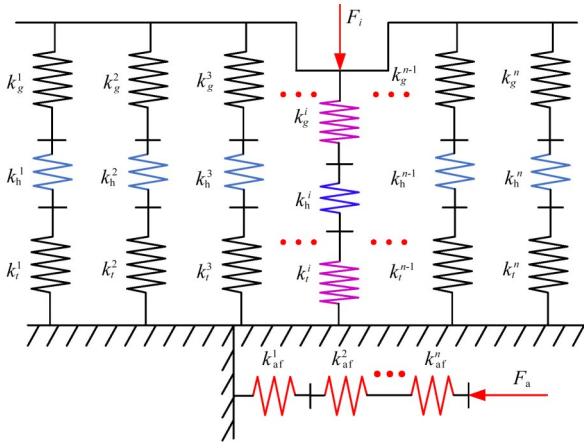


图5 考虑轴向分力的切片刚度模型

Fig. 5 Slice stiffness model considering the axial component force

现有斜齿轮计算方法忽略了轴向弯曲刚度。因此，如图6所示，本文通过引入轴向弯曲势能，对现有斜齿轮时变啮合刚度计算方法进行改进，以进一步提高求解精度。

由斜齿轮轴向力产生的轴向弯曲势能可表示为

$$U_{af} = \frac{F_a^2}{2k_{af}} = \int_0^{r_f} \frac{M_{af}^2}{2EI_{af}} dy' \quad (19)$$

式中， M_{af} 为轴向力施加在齿轮基体上的转矩，可表示为

$$M_{af} = F_a(y_\alpha - y_1) \quad (20)$$

式中， y_1 为切片到齿轮圆心的水平距离； y_α 为齿轮啮合点到齿轮圆心的水平距离。 I_{af} 为渐开线上任意位置处的截面惯性矩，可表示为

$$I_{af} = \frac{1}{6} B^3 \sqrt{r_f^2 - y_1^2} \quad (21)$$

式中， B 为切片齿宽。

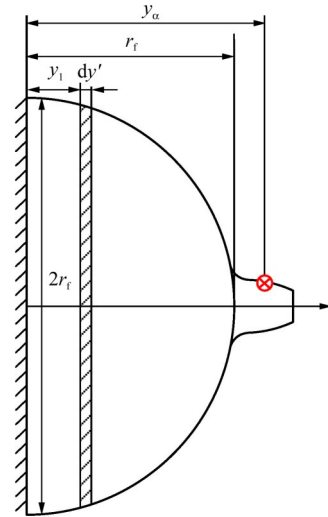


图6 轴向弯曲刚度模型

Fig. 6 Axial bending stiffness model

因此，轴向弯曲刚度计算式为

$$\frac{1}{k_{af}} = \int_0^{r_f} \frac{\cos^2\alpha_1 \sin^2\beta (y_\alpha - y_1)^2}{EI_{af}} dy' \quad (22)$$

根据渐开线的性质，啮合点和齿轮圆心之间的水平距离 y_α 可表示为

$$y_\alpha = r_b(\alpha_1 + \alpha_2)\sin\alpha_1 + \cos\alpha_1 \quad (23)$$

最终，一片薄片齿轮的轴向弯曲刚度计算式为

$$\frac{1}{k_{af}^i} = \int_0^{r_f} \{ 6r_b \cos^2\alpha_1 \sin^2\beta [(\alpha_1 + \alpha_2)\sin\alpha_1 + \cos\alpha_1] - y^2 \} / (Ey^3 \sqrt{r_f^2 - y'^2}) dy' \quad (24)$$

联立式(9)、式(10)、式(11)、式(17)、式(18)、式(24)，一对齿轮副的总啮合刚度可表示为

$$k_p = \sum_{i=1}^n k_p^i = \sum_{i=1}^n [1 / (\frac{1}{k_h^i} + \frac{1}{k_{b1}^i} + \frac{1}{k_{s1}^i} + \frac{1}{k_{af}^i} + \frac{1}{k_{f1}^i} + \frac{1}{k_{b2}^i} + \frac{1}{k_{s2}^i} + \frac{1}{k_{a2}^i} + \frac{1}{k_{f2}^i} + \frac{1}{k_{af2}^i} + \frac{1}{k_{a1}^i} + \frac{1}{k_{af1}^i} + \frac{1}{k_{a2}^i})] \quad (25)$$

2.4 考虑轴向分力的斜齿轮时变啮合刚度方法

通过 Matlab 软件建立考虑轴向分力的斜齿轮副时变啮合刚度模型。计算流程如图7所示。输入斜齿轮基本参数，比较端面重合度 ε_α 和轴向重合度 ε_β 的

大小, 确定单齿啮合时最大接触线长度; 随后将齿轮沿齿宽方向均匀划分为 n 片, 对于每一薄片, 确定其啮合力与齿轮中心线垂线方向之间的夹角, 根据式(9)~式(11)分别计算每片齿轮的轴向压缩、赫兹接触和基体的刚度。考虑螺旋角对载荷力的影响, 对斜齿轮进行受力分析, 加入轴向分力产生的轴向弯曲势能, 并改进剪切和弯曲刚度模型, 根据式(17)、式(18)和式(24), 计算每片轮齿的弯曲、剪切刚度及每片轮齿基体的轴向弯曲刚度。将所有薄片齿轮的刚度进行累加, 最终得出单个轮齿的啮合刚度。图7中, β_b 为基圆螺旋角; P_b 为端面基圆齿距。

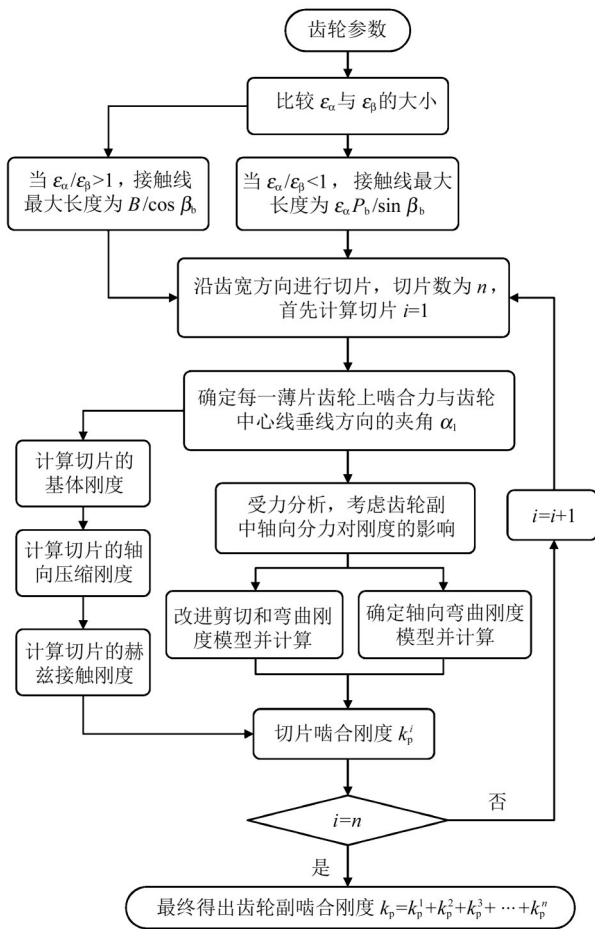


图7 提出的计算程序

Fig. 7 Proposed computational procedure

根据单齿啮合周期可确定完整齿轮啮合周期的范围, 将视为基准的单齿啮合刚度曲线左右平移, 得出斜齿轮副的时变啮合刚度。

3 结果验证与分析

一对齿轮参数定义如下: 齿数为 20, 模数为 3 mm, 螺旋角为 15°, 齿宽为 30 mm, 转速为 1 000 r/min。采用 ISO 6336-1: 2019 算法^[21]、有限元法、文献[12]^[6]及本文的改进方法计算齿轮副的时变

啮合刚度。

3.1 结果验证

将所建立的 3D 模型导入 FEM 软件, 建立图 8 所示的斜齿轮副有限元验证模型。将啮合齿划分为小尺寸网格并作为关键分析对象, 根据仿真结果提取主、从动轮转角, 计算传动误差, 其计算式为

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \frac{z_1}{z_2} \varphi_1 \quad (26)$$

式中, φ_1 、 φ_2 分别为主动轮、从动轮的转角; z_1 、 z_2 分别为主动轮、从动轮的齿数。

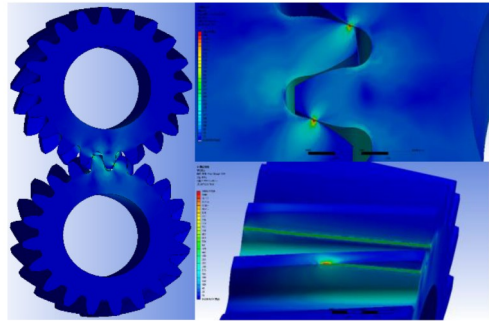


图8 斜齿轮副有限元模型

Fig. 8 Finite element model of the helical gear pair

齿轮综合啮合刚度转换式为

$$k_m(t_T) = \frac{T_m}{\Delta\varphi} \left(\frac{2\cos\beta}{m_n z_2 \cos\alpha_1} \right)^2 \quad (27)$$

式中, t_T 为时间; T_m 为负载转矩; α_1 为端面压力角; m_n 为法向模数。

使用有限元法、文献[12]^[6]及本文方法计算出单齿啮合刚度的极大值 k_{max} , 分别与 ISO 6336-1: 2019 算法所得到的计算值进行比较, 结果如表 1 所示。文献[12]^[6]的计算值与 ISO 6336-1: 2019 算法最为接近, 单齿啮合刚度误差为 1.11%。有限元法计算结果比 ISO 6336-1: 2019 算法低, 单齿啮合刚度误差为 1.66%。本文方法考虑了轴向分力引起的弯曲刚度、剪切刚度值变化及齿轮基体的轴向变形, 改进后的啮合刚度计算结果比文献[12]^[6]大, 与 ISO 6336-1: 2019 算法相比的单齿啮合刚度误差为 1.66%。

表1 啮合刚度误差对比分析

Tab. 1 Comparative analysis of meshing stiffness errors

	$k_{max}/(10^8 \text{ N/m})$	误差/%
ISO 标准	3.61	0
有限元法	3.55	1.66
文献[12] ^[6]	3.65	1.11
本文	3.67	1.66

3.2 分析对啮合刚度的影响

新引入的轴向弯曲刚度会使齿轮副啮合刚度值增加；由式(17)、式(18)得，改进后算法计算的弯曲、剪切刚度值比改进前大，使齿轮副的啮合刚度值减小。图9所示为采用有限元法、文献[12]⁶及本文改进算法得到的啮合刚度曲线。从图9可以看出，本文啮合刚度值比文献[12]⁶大，因此，改进后的弯曲、剪切算法计算结果影响较大。

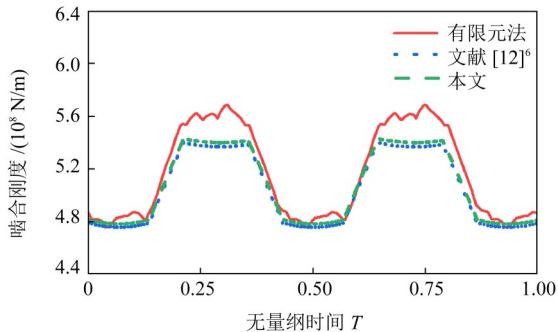


图9 啮合刚度曲线

Fig. 9 Meshing stiffness curves

4 斜齿轮基本参数对啮合刚度的影响

齿轮啮合刚度是反映轮齿从啮合到脱离啮合状态的参数，用于描述齿轮副在啮合过程中抵抗弹性变形的能力。在齿轮设计中，许多参数都会引起啮合刚度的变化。因此，以表2所示参数值为基准值，通过对不同参数的取值予以合理的调整，研究齿轮副啮合刚度的极值和波动特性。

表2 齿轮参数

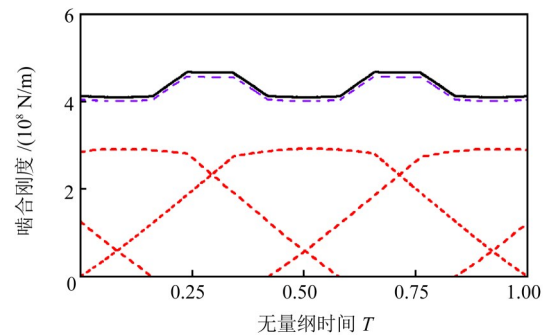
Tab. 2 Gear parameters

参数	数值	参数	数值
模数 m_n/mm	4	齿数 $z_1(z_2)$	40(40)
螺旋角 $\beta/(\circ)$	20	齿宽 b/mm	30
压力角 $\alpha/(\circ)$	20	泊松比	0.3
弹性模量 E/Pa	2.06×10^{11}		

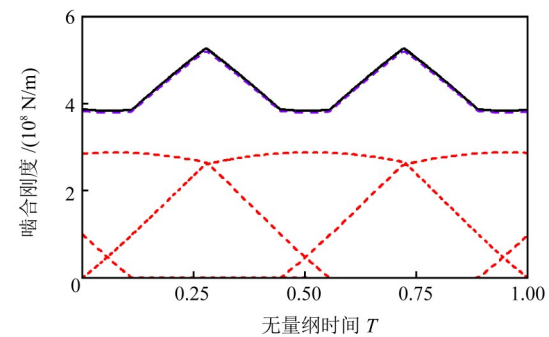
4.1 螺旋角

改变表2参数中螺旋角大小，以 5° 为步长，从 0° 递增至 20° ，求解不同螺旋角下斜齿轮的单齿啮合刚度，再通过拟合得出综合刚度，结果如图10所示(图中，红色虚线和黑色实线分别表示改进算法计算得到的单齿啮合刚度与综合啮合刚度，紫色虚线为基于传统势能法的综合啮合刚度)。当螺旋角较小时，从式(24)和图10(c)、图10(d)可以得知，轴向分力产生的轴向弯曲刚度较小，且对弯曲刚度和剪切刚度的影响较弱，对啮合刚度产生的影响也随之减弱。因此，改进算法求解后的综合啮合刚度值贴近传

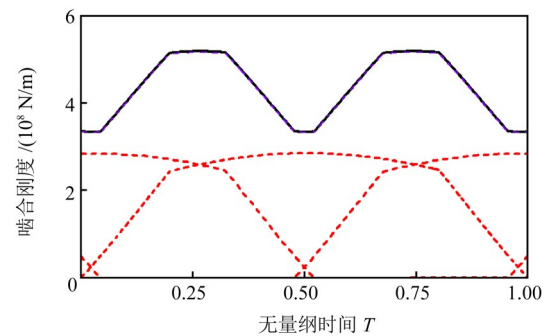
统势能法下的刚度值，此时齿轮传动易产生突变。在螺旋角从 0° 到 20° 不断增长时，轴向分力会不断增大，轴向弯曲刚度和轴向重合度的增加值会随着螺旋角的增加表现得越来越大，改进后的弯曲刚度和剪切刚度值增加，推动齿轮啮合刚度值整体延长，与传统势能法的啮合刚度差值越来越显著，并且到达峰值的相对时间延长；随着螺旋角增大，单齿接触区域逐渐减小，双齿接触区域及三齿啮合区域逐渐增大，齿轮副啮合刚度的波动会表现得更加平稳，传动稳定性得到提高。



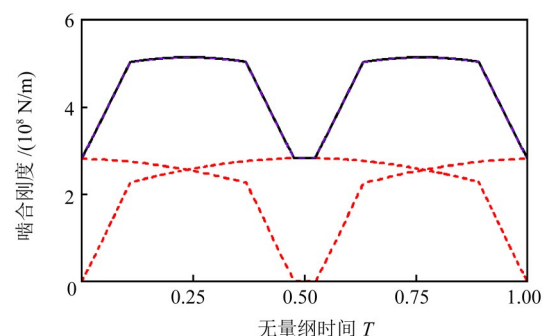
(a) $\beta=20^\circ$



(b) $\beta=15^\circ$



(c) $\beta=10^\circ$



(d) $\beta=5^\circ$

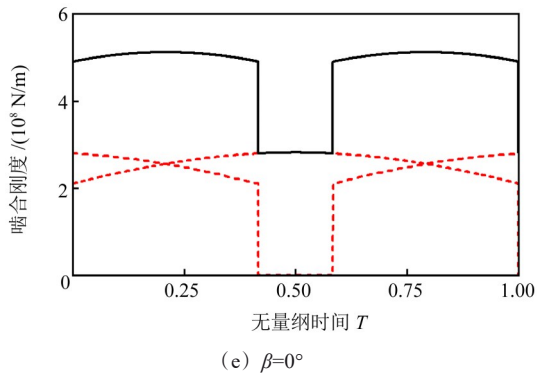


图 10 不同螺旋角下齿轮的啮合刚度

Fig. 10 Meshing stiffness of the gear with different helix angles

4.2 压力角

随着压力角增加, 通过几何关系增加齿厚, 可提高齿根抗弯强度; 并且渐开线曲率半径会随压力角增大而增加, 降低接触应力, 齿轮的单齿啮合刚度峰值增加, 延长齿面疲劳寿命。图 11 所示为不同压力角对单齿啮合刚度的影响。当压力角增加时, 端面重合度会降低, 轴向重合度不受影响。因此, 其比重提高, 刚度的积累过程被拉长。图 12 所示为不同压力角下啮合刚度波动值和均值的变化曲线。由于压力角增加, 齿轮总重合度降低, 最终使齿轮刚度均值呈减小趋势。但是, 压力角的变化只会略微改变啮合线的倾斜程度, 对啮合线总长度的影响较小。所以, 对啮合刚度波动值的影响较弱, 不会产生明显变化。

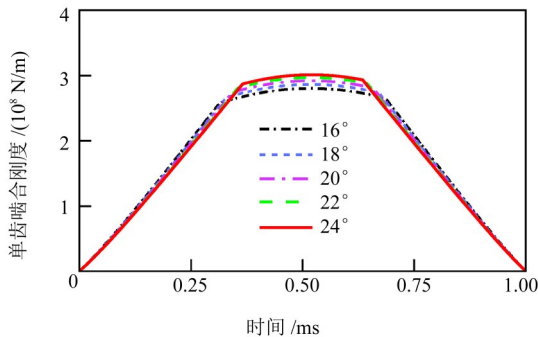


图 11 不同压力角下单齿啮合刚度

Fig. 11 Single tooth meshing stiffness at different pressure angles

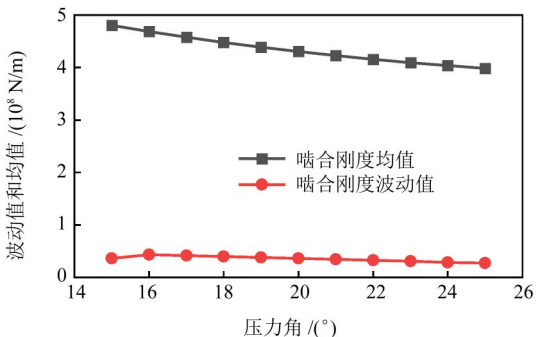


图 12 不同压力角下啮合刚度的变化曲线

Fig. 12 Variation curves of the meshing stiffness at different pressure angles

4.3 齿数和模数

在齿轮箱的初始设计阶段, 其核心结构参数已经固定, 为了保持给定的中心距, 齿数与模数需要同步调整。将齿数以 10 为步长从 20 递增至 70 时, 模数对应从 8 mm 缩减至 2.29 mm。齿数增加会提高端面重合度和轴向重合度。其中, 轴向重合度的增幅更为显著, 将导致啮合起始阶段的载荷过渡时间延长。图 13 所示为不同齿数下单齿啮合刚度。图 14 所示为不同齿数下啮合刚度的变化曲线。由图 13、图 14 可知, 单齿啮合刚度峰值随齿数增加呈现递减趋势, 但整体啮合刚度均值与齿数间并不存在线性关系; 当齿数过少时, 啮合刚度波动值愈加明显; 齿数为 50 时的啮合刚度波动值最小。

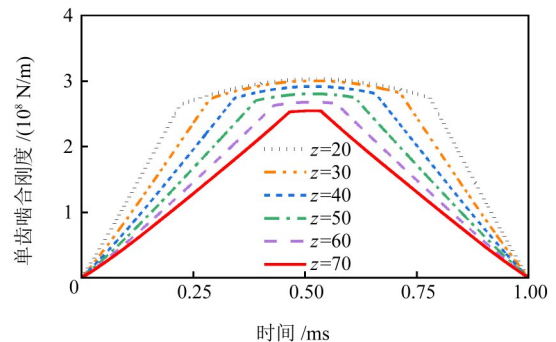


图 13 不同齿数下单齿啮合刚度

Fig. 13 Single tooth meshing stiffness at different numbers of teeth

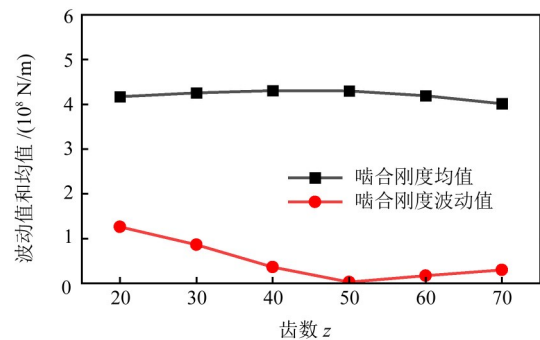


图 14 不同齿数下啮合刚度的变化曲线

Fig. 14 Variation curve of the meshing stiffness at different numbers of teeth

4.4 齿宽

从式(21)可以看出, 当齿宽增加时, 切片数量和齿轮基体的截面惯性矩将增加。因此, 轴向分力产生的啮合刚度呈线性递增趋势; 并且齿宽增加使轮齿接触变形、弯曲变形、剪切变形、轴向压缩变形和基体变形减小, 从而使单齿啮合刚度增加。轴向重合度与齿宽成正比关系, 齿宽增加, 刚度到达峰值所需时间也将延长。将齿宽以 10 mm 为步长从 20 mm 递增至 60 mm, 对应的单齿啮合刚度及其变化曲线分别如图 15、图 16 所示。齿宽增加使啮合刚度均值接

近线性规律增加；当轴向重合度随齿宽增加到整数时，啮合刚度波动值最小，此时齿宽为40 mm，轴向重合度为1.088。

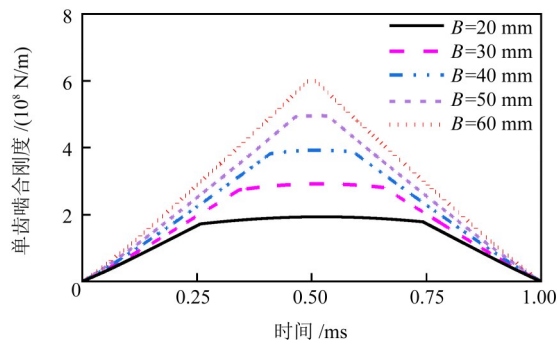


图15 不同齿宽下单齿啮合刚度

Fig. 15 Single tooth meshing stiffness at different tooth widths

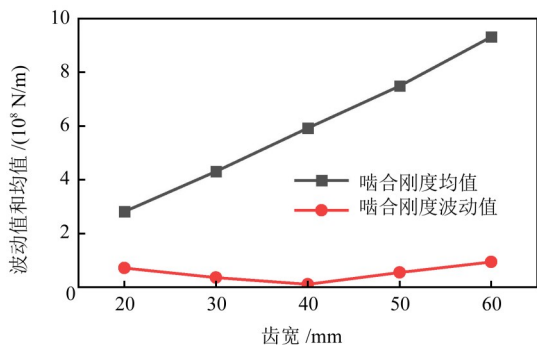


图16 不同齿宽下啮合刚度的变化曲线

Fig. 16 Variation curves of the meshing stiffness at different tooth widths

5 结论

1) 提出一种改进的斜齿轮副啮合刚度模型。该模型不仅包括传统的5部分刚度分量，还在现有的势能法中引入新的轴向弯曲势能；改进剪切刚度和弯曲刚度计算公式，使斜齿轮啮合刚度的计算精度得到提升，并结合ISO标准算法及有限元法进行了验证。

2) 改进算法与传统势能法相比，计算得到的啮合刚度改变量受螺旋角影响较大。由于增长后的剪切势能和弯曲势能对刚度的影响大于新引入的轴向弯曲势能，当螺旋角超过 15° 时，改进算法与传统势能法的差异性显著，更加体现出改进算法的优越性。

3) 利用本文算法研究了齿轮基本参数变化对啮合刚度的影响规律。螺旋角越大，齿轮传动表现越平稳；压力角对时变啮合刚度影响较小；而齿宽影响较大，均近似成线性关系；中心距不变时，齿数变化对时变啮合刚度均值影响较弱，齿数较多时啮合刚度波动值较小；在时变啮合刚度波动值最小时，计算出的轴向重合度最接近整数。

参 考 文 献

- [1] YANG D C H, LIN J Y. Hertzian damping, tooth friction and bending elasticity in gear impact dynamics[J]. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 1987, 109(2): 189-196.
- [2] TIAN X H. Dynamic simulation for system response of gearbox including localized gear faults[D]. Edmonton: University of Alberta, 2004: 24-29.
- [3] ZHOU X J, SHAO Y M, LEI Y G, et al. Time-varying meshing stiffness calculation and vibration analysis for a 16DOF dynamic model with linear crack growth in a pinion[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2012, 134(1): 011011.
- [4] 李亚鹏, 孙伟, 魏静, 等. 齿轮时变啮合刚度改进计算方法[J]. 机械传动, 2010, 34(5): 22-26.
LI Yapeng, SUN Wei, WEI Jing, et al. Study on the improved algorithm of the time-varying meshing stiffness of gear[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2010, 34(5): 22-26.
- [5] CHEN Z G, SHAO Y M. Mesh stiffness calculation of a spur gear pair with tooth profile modification and tooth root crack[J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 62: 63-74.
- [6] 陈思宇, 谭儒龙, 郭晓东, 等. 直齿圆柱齿轮啮合刚度计算方法研究[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2021, 35(1): 97-103.
CHEN Siyu, TAN Rulong, GUO Xiaodong, et al. Research on calculation method of meshing stiffness of spur gears[J]. Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science), 2021, 35(1): 97-103.
- [7] WANG J G, ZHANG J, YAO Z Y, et al. Nonlinear characteristics of a multi-degree-of-freedom spur gear system with bending-torsional coupling vibration[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 121: 810-827.
- [8] LIANG X H, ZUO M J, PANDEY M. Analytically evaluating the influence of crack on the mesh stiffness of a planetary gear set[J]. Mechanism and Machine Theory, 2014, 76: 20-38.
- [9] GU X Y, VELEX P, SAINOT P, et al. Analytical investigations on the mesh stiffness function of solid narrow faced spur and helical gears[C]//ASME 2015 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. American Society of Mechanical Engineers, 2015: V010T11A014.
- [10] WANG Q B, HU P, ZHANG Y M, et al. A model to determine mesh characteristics in a gear pair with tooth profile error[J]. Advances in Mechanical Engineering, 2014, 6: 751476.
- [11] WAN Z G, CAO H R, ZI Y Y, et al. Mesh stiffness calculation using an accumulated integral potential energy method and dynamic analysis of helical gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2015, 92: 447-463.
- [12] 刘文, 李锐, 张晋红, 等. 斜齿轮时变啮合刚度算法修正及影响因素研究[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2018, 45(2): 1-10.
LIU Wen, LI Rui, ZHANG Jinhong, et al. Study on correction algorithm of time-varying mesh stiffness of helical gears and its influencing factors [J]. Journal of Hunan University (Natural

- Sciences), 2018, 45(2): 1-10.
- [13] KARPAT F, DOĞAN O, YUCE C, et al. An improved numerical method for the mesh stiffness calculation of spur gears with asymmetric teeth on dynamic load analysis [J]. *Advances in Mechanical Engineering*, 2017, 9(8): 168781401772185.
- [14] CHANG L H, LIU G, WU L Y. A robust model for determining the mesh stiffness of cylindrical gears [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2015, 87: 93-114.
- [15] HAN L, QI H J. Influences of tooth spalling or local breakage on time-varying mesh stiffness of helical gears [J]. *Engineering Failure Analysis*, 2017, 79: 75-88.
- [16] YAN H, WEN L H, YIN S P, et al. Research on gear mesh stiffness of helical gear based on combining contact line analysis method [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2022, 236(16): 9354-9366.
- [17] YANG H B, SHI W K, CHEN Z Y, et al. An improved analytical method for mesh stiffness calculation of helical gear pair considering time-varying backlash [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, 170: 108882.
- [18] 刘子谦, 孙宇, 周朝东, 等. 斜齿轮啮合刚度改进算法及其影响因素分析 [J]. *机械传动*, 2023, 47(3): 39-48.
- LIU Ziqian, SUN Yu, ZHOU Chaodong, et al. Study on an improved algorithm for helical gear meshing stiffness and its influencing factors [J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2023, 47(3): 39-48.
- [19] 田晓青, 李正兴, 韩江, 等. 基于齿轮时变啮合过程的修形齿面设计方法研究 [J]. *机械传动*, 2023, 47(2): 70-78.
- TIAN Xiaqing, LI Zhengxing, HAN Jiang, et al. Research on the design method of the modified gear tooth surface based on the gear time-varying meshing process [J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2023, 47(2): 70-78.
- [20] ZHANG H Y, LI S, SUN H Y. Study on time-varying meshing stiffness of helical gears with root crack faults based on improved potential energy method [J]. *Advances in Mechanical Engineering*, 2024, 16(4): 16878132241240928.
- [21] International Organization for Standardization. Calculation of load capacity of spur and helical gears—part 1: basic principles, introduction and general influence factors: ISO 6336-1: 2019 [S]. Geneva: International Organization for Standardization, 2019: 71-77.

Improved algorithm for time-varying meshing stiffness of helical gears considering axial force component and its influencing factors

MAO Hancheng DING Yuanwei LI Xuwei ZHANG Bingqian

(School of Mechanical Engineering, Heilongjiang University of Science and Technology, Harbin 150022, China)

Abstract: [Objective] Aiming at the problem of finding an accurate time-varying mesh stiffness solution for helical gears, a helical gear mesh stiffness calculation method based on axial force and slicing was proposed. [Methods] Each lamellar gear was simplified as a variable-section cantilever beam, and a stiffness improved algorithm was proposed by adding a new axial bending potential energy through force analysis and further modifying the existing potential-energy-based method for calculating helical gear meshing stiffness. The feasibility of the improved algorithm was verified by comparing and analyzing with the finite element method and the slice method. On this basis, the effects of parameters such as helix angle, pressure angle, tooth number and tooth width on the meshing stiffness were investigated. [Results] The results show that the traditional potential energy method is only applicable to helical gears with small helix angles, while the improved algorithm applies to arbitrary helical gears. The smoother the gearing performance is at increasing the helix angle. The pressure angle has less effect on the mean value of time-varying meshing stiffness. The tooth width has a large influence, which is approximately linear. When the center distance is certain, the change of the number of teeth has a smaller influence on the mean value, and the fluctuation value of the meshing stiffness is smaller when the number of teeth is larger. The fluctuation value is the smallest when the axial overlap is close to an integer.

Key words: Helical gear; Time-varying meshing stiffness; Potential energy method; Axial component of force; Axial bending stiffness

(编辑: 贾文倩)